

CNO101614
U100
SAL

REPUBLIQUE DU SENEGAL
Un Peuple • Un But • Une Foi

MINISTRE DE L'AGRICULTURE



INSTITUT SENEGALAIS DE RECHERCHES AGRICOLES

Route des Hydrocarbures - Bel-Air - Tel : (22 1) 832-24-3 1/23 Fax : (22 1) 832-24-27 - BP 3 120 - DAKAR - (Sénégal)

**PLANIFICATION ET ANALYSE STATISTIQUE
DES EXPERIMENTATIONS AGRICOLES**

Ciré Elimane SALL
ISRA

David BOGGIO
ISRA/CERAAS

Février 2006

SOMMAIRE

1	INTRODUCTION	1
2	PRINCIPES DE LA PLANIFICATION EXPERIMENTALE.....	2
2.1	LA RANDOMISATION	2
2.2	LES REPETITIONS	2
2.3	LE CONTROLE DE L'ERREUR.....	2
3	PRINCIPALES ETAPES DE LA PLANIFICATION EXPERIMENTALE.....	4
3.1	LA DEFINITION DE L'OBJECTIF EXPERIMENTAL	4
3.2	LA DEFINITION DES FACTEURS A ETUDIER	4
3.3	LA DEFINITION DES CONDITIONS EXPERIMENTALES	4
3.4	LA DEFINITION DES UNITES EXPERIMENTALES	5
3.5	LA DEFINITION DES MESURES ETOHSERVATIONS.	5
3.6	LE CHOIX DU DISPOSITIF EXPERIMENTAL.....	5
3.6.1	<i>Le dispositif en randomisation totale.....</i>	<i>5</i>
3.6.2	<i>Le dispositif en blocs complets randomisés.....</i>	<i>6</i>
3.6.3	<i>Le dispositif en split plot.....</i>	<i>6</i>
3.6.4	<i>Les dispositif en blocs incomplets équilibré.~</i>	<i>6</i>
3.7	LA DETERMINATION DU NOMBRE DE REPETITIONS	7
3.8	LA DETERMINATION DE LA METHODE D'ANALYSE STATISTIQUE	8
4	INTRODUCTION AU MODELE LINEAIRE.....	9
4.1	PRESENTATION DU MODELE LINEAIRE	9
4.2	HYPOTHESES DU MODELE LINEAIRES	9
4.3	ESTIMATION DES PARAMETRES DU MODELE	10
4.4	TEST D'HYPOTHESE~ LINEAIRES	11
5	L'ANALYSE DE LA VARIANCE.....	14
5.1	PRINCIPES DE L'ANALYSE DE LA VARIANCE	14
5.2	ANALYSE DE LA VARIANCE A UN FACTEUR ETUDIE	15
5.2.1	<i>Anova à un facteur en randomisation totale.. ..</i>	<i>15</i>
5.2.2	<i>Anova à un facteur dans un dispositif en blocs aléatoires complets.. ..</i>	<i>16</i>
5.3	ANALYSE DE LA VARIANCE A DEUX FACTEURS ETUDIES	17
5.3.1	<i>Anova à deux facteurs en randomisation totale.....</i>	<i>18</i>
5.3.2	<i>Anova à deux facteurs étudiés dans un dispositif en blocs aléatoires complets.....</i>	<i>19</i>
5.3.3	<i>Anova à deux facteurs dans un dispositif en split plot.....</i>	<i>20</i>
5.4	LES METHODES DE COMPARAISON DES MOYENNES.	21
5.4.1	<i>La méthode de la plus petite différence significative.....</i>	<i>21</i>
5.4.2	<i>La méthode de Bonferroni.....</i>	<i>22</i>
5.4.3	<i>La méthode de Newman et Keuls.....</i>	<i>23</i>
5.4.4	<i>La méthode de Dunnet.....</i>	<i>24</i>
5.4.5	<i>La méthode des contrastes.....</i>	<i>25</i>
5.4.6	<i>La méthode des polynômes orthogonaux.....</i>	<i>26</i>
5.5	VALIDATION DES HYPOTHESES DE L'ANALYSE DE LA VARIANCE	28
6	PUISSANCE ET DIMENSIONNEMENT D'UNE EXPERIMENTATION.	29
6.1	RAPPEL : TEST DE FISHER LORS D'UNE ANALYSE DE VARIANCE.....	29
6.2	CALCUL DE LA PUISSANCE D'UNE EXPERIMENTATION.....	31
6.2.1	<i>Puissance de la comparaison de deux niveaux d'un facteur</i>	<i>31</i>
6.2.2	<i>Puissance d'une analyse de variance à un facteur comportant plusieurs niveaux</i>	<i>35</i>
6.2.3	<i>Puissance d'une analyse de variance à plusieurs facteurs comportant plusieurs niveaux.</i>	<i>37</i>
6.3	CONCLUSION : DEMARCHE DE CHOIX D'UN DISPOSITIF EXPERIMENTAL ET DIMENSIONNEMENT DE L'ESSAI.	38

7	LES REGROUPEMENTS D'ESSAIS	42
7.1	INTRODUCTION.....	42
7.2	EFFETS ALEATOIRES - EFFETS FIXES	42
7.2.1	Effets aléatoires.....	42
7.2.2	Effets fixes.....	42
7.3	CONDITIONS DE REALISATION DES ESSAIS MULTILOCAUX.....	43
7.4	ANALYSE DES SERIES D'ESSAIS.....	43
7.4.1	Etape 1 : analyse des essais individuel.....	43
7.4.2	Etape 2 : sélection des essais de même variance résiduelle.....	43
7.4.3	Etape 3 : analyse de variance du regroupement.....	44
7.5	ETUDE D'UN EXEMPLE	46
7.5.1	Etape 1 : analyse des essais individuels	46
7.5.2	Etape 2 : sélection des essais de même variance résiduelle	47
7.5.3	Etape 3 : analyse de variance du regroupement.....	48
8	L'ANALYSE D'ADAPTABILITE : UNE METHODE POUR LA MISE AU POINT ET L'ANALYSE DES ESSAIS EN MILIEU REEL	49
8.1	OBJECTIFS:.....	49
8.2	DONNEES NECESSAIRES :	49
8.3	CONDUITE DE L'ANALYSE ENVIRONNEMENTALE :	49
8.3.1	Calculer une mesure de la performance de chaque environnement	49
8.3.2	Estimer et modéliser la réponse des traitements à l'environnement	49
8.3.3	Définir des domaines de réponse équivalente des traitements à l'environnement.....	50
8.3.4	Valider la constitution des domaines.....	50
8.3.5	Mener une analyse de variance par domaine	50
8.3.6	Effectuer une anova sur le regroupement des domaines.....	50
8.3.7	Formuler des recommandations indépendantes dans chaque domaine	50
8.3.8	Expliquer l'indice environnemental par des variables caractéristiques du milieu	50
8.3.9	formuler les recommandations en termes de caractéristiques du milieu.....	51
8.4	ETUDE D'UN EXEMPLE.....	51
8.4.1	Les données.....	51
8.4.2	Calcul de l'indice environnemental	52
8.4.3	Modélisation de la réponse des traitements à l'environnement.....	53
8.4.4	Définition des domaines de réponse équivalente des traitements à l'environnement.....	54
8.4.5	Validation de la constitution des domaines (homogénéité des blocs)	55
8.4.6	Analyse de variatace par domaine.....	55
8.4.7	Recommandations indépendantes dans chaque domaine.....	55
8.4.8	Explication de l'indice environnemental par des variables caractéristiques du milieu et Formulation des recommandations en termes de caractéristiques du milieu	58

ANNEXE 1 : CANEVAS DE PROTOCOLE EXPERIMENTAL

ANNEXE 2 : PRESENTATION DES DONNEES AVANT ANALYSE

ANNEXE 3 : ABAQUES DE DETERMINATION DE LA PUISSANCE D'UNE COMPARAISON DE PLUSIEURS MOYENNES (PEARSON ET HARTLEY, 1951)

1 INTRODUCTION

L'expérimentation permet d'évaluer la réponse induite sur une ou plusieurs variables par la modification d'un ou de plusieurs facteurs expérimentaux. Le plus souvent on envisage de mener une expérimentation afin de vérifier une hypothèse suggérée par des connaissances antérieures ou des problèmes posés à l'agriculture. Il faut alors élaborer une procédure de vérification de cette hypothèse. Cette procédure comporte différentes phases parmi lesquelles on note:

- le choix du matériel expérimental ;
- le choix des caractères à observer ou mesurer ;
- la détermination des méthodes d'observation et de mesure ;
- la détermination des critères de validation de l'hypothèse.

Les deux premières phases ne posent souvent pas beaucoup de difficultés à l'expérimentateur car elles relèvent essentiellement du domaine de recherche considéré. Par contre, les deux dernières exigent un certain bagage en statistique. En effet, il faudra savoir comment déterminer une méthode fiable et précise de mesures et dans quel cadre ces mesures obtenues permettront de valider ou d'invalider l'hypothèse.

Ainsi, à l'issue de l'expérimentation une décision sera prise, mais elle sera prise dans un contexte incertain sujet à diverses sources de variation liées au matériel expérimental utilisé, aux conditions expérimentales (par exemple la température, la pluviométrie, l'hétérogénéité du sol), aux erreurs de mesure etc. La décision d'accepter ou de refuser une hypothèse sera basée alors sur un raisonnement probabilistique ou statistique. Nous voyons dès à présent l'importance et l'enjeu de la statistique dans le domaine de l'expérimentation agricole.

Exemple

Considérons une expérimentation mise en œuvre dans le but de comparer les rendements potentiels de deux variétés A et B d'arachide. L'hypothèse à tester consiste à dire que ces deux variétés produisent le même rendement. L'expérimentateur, disposant de deux parcelles contiguës de même taille, sème chacune des variétés sur une des parcelles et observe que la variété B donne un meilleur rendement.

L'expérimentateur, à partir seulement de cette observation, ne pourra certainement pas avancer une conclusion valable en vue de valider son hypothèse de travail. En effet cette différence: observée pourrait très bien être due à des facteurs autres que la variété, en l'occurrence une attaque d'insectes plus marquée sur la parcelle ayant reçue la variété A, une plus grande fertilité de la parcelle ayant reçue B pourraient par exemple expliquer cette différence: de rendement.

Nous voyons ainsi que l'expérimentateur devra planifier son expérience de telle façon a pouvoir décider si la différence observée pouvait être attribuée à un effet de la variété ou bien être attribuée à d'autres facteurs dits; "non contrôlés" par l'expérience

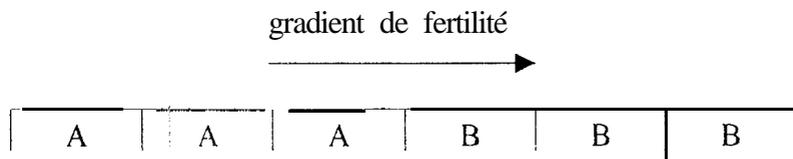
2 PRINCIPES DE LA PLANIFICATION EXPERIMENTALE

Une planification expérimentale de qualité peut être définie comme "*la façon de fournir l'effort expérimental minimum pour la meilleure précision*", en d'autres termes le moyen d'obtenir des résultats précis au moindre coût.

Nous mesurons dès à présent toute l'importance à devoir accorder à l'étape de la planification expérimentale dans le processus de recherche. La planification expérimentale doit, pour garantir la validité de l'analyse statistique des données qui seront recueillies, obéir à trois principes fondamentaux que nous allons brièvement décrire.

2.1 La randomisation

Reprenons à présent l'exemple précédent en considérant que nous disposons de six parcelles expérimentales contiguës, les trois premières recevant la variété A et les trois autres la variété B.



Dans ce cas, une des variétés pourrait être constamment favorisée, au point de vue de son rendement, s'il existe par exemple un gradient de fertilité allant de la droite à la gauche du terrain. Pour éviter toute source d'erreur systématique en avantageant une des variétés au détriment de l'autre, il nous faut procéder à la randomisation qui est une règle d'affectation au hasard des traitements aux unités expérimentales. Cette procédure garantit l'indépendance des observations d'une unité expérimentale à l'autre et élimine les biais qui peuvent être induits par une mauvaise répartition des traitements aux unités expérimentales.

2.2 Les répétitions

Si l'expérimentateur avait choisi de semer la même variété sur les six parcelles, il aurait quand même sûrement observé une différence de rendement entre ces parcelles; cette différence est due à une source de variabilité appelée erreur expérimentale qui ne peut être estimée que s'il y a des répétitions, c'est à dire affecter une même variété à différentes parcelles expérimentales.

Il est en effet nécessaire d'avoir des répétitions pour évaluer l'erreur expérimentale et distinguer ainsi cette erreur de l'effet dû aux traitements.

2.3 Le contrôle de l'erreur

Nous venons de voir que les répétitions nous permettent d'avoir une mesure de l'erreur expérimentale. Il nous faut, pour la réduire, limiter l'influence de certains facteurs non contrôlés par l'expérience. Nous chercherons, pour cela, à constituer des regroupements d'unités expérimentales les plus homogènes possible. Une part de la variabilité sera ainsi contrôlée et l'erreur expérimentale réduite.

Pour un essai au champ, on cherchera lorsqu'un gradient d'hétérogénéité (un gradient de fertilité par exemple) est reconnu à constituer des groupes de parcelles semblables du point de

vue de leur fertilité de telle sorte que la variabilité du phénomène étudié soit plus faible entre des unités expérimentales d'un même groupe qu'entre unités expérimentales appartenant à des groupes différents. Les traitements seront alors répartis de manière aléatoire au niveau de chacun de ces groupes ou blocs. Le facteur de variation lié à la fertilité du sol sera ainsi contrôlé et l'erreur expérimentale réduite.

3 PRINCIPALES ETAPES DE LA PLANIFICATION EXPERIMENTALE

Après une étude bibliographique permettant de procéder à l'état des connaissances sur le thème de recherche projeté, l'expérimentateur doit définir lors de la planification de son expérience différents éléments dont les principaux sont :

3.1 La définition de l'objectif expérimental

Une expérience étant mise en place pour répondre à un certain objectif, il est nécessaire que cet objectif soit défini de manière claire et concise. On conçoit aisément que la définition de l'objectif expérimental détermine la réalisation de l'expérimentation et la nature des mesures qui seront relevées.

Les diverses questions auxquelles l'expérience devrait répondre doivent être formulées sans ambiguïté et classées par ordre d'importance lorsque l'objectif de l'expérience est multiple.

3.2 La définition des facteurs à étudier

Un facteur est défini par un ensemble d'éléments de même nature dont nous voulons étudier l'influence sur une certaine variable : chacun de ces éléments est appelé un niveau ou une modalité du facteur.

Les facteurs à étudier constituent l'objet même de notre expérience. Ainsi leur nature doit être définie avec précision ; le nombre de facteurs et le nombre de niveaux ou modalités de chacun d'entre eux doivent être clairement déterminés.

Dans le cadre de notre exemple ci-dessus, le facteur étudié est la variété d'arachide. Les variétés A et B constituent les deux modalités de ce facteur.

Un traitement est défini par une combinaison des niveaux des différents facteurs étudiés. Dans le cas où un seul facteur serait étudié un traitement correspond à un niveau de ce facteur.

Exemple

A titre d'illustration considérons qu'on s'intéresse à l'étude de 2 facteurs : la variété d'arachide à deux modalités (variété A et variété B) et l'engrais azoté à deux niveaux (dose D1 et dose D2).

Chacune des 4 combinaisons des deux facteurs (ADI, AD2, BD 1 et BD2) constitue un traitement.

3.3 La définition des conditions expérimentales

Les résultats d'une expérience peuvent être fortement influencés par les conditions expérimentales et, à cet effet, il est alors nécessaire de bien définir ces conditions.

Les conditions expérimentales peuvent être par exemple dans le domaine végétal le site d'implantation de l'expérience (en station, en milieu paysan), les sources d'hétérogénéité potentielles sur le site (existence de gradient de fertilité ou de salinité), le précédent cultural, les techniques culturales etc.

3.4 La définition des unités expérimentales

L'unité expérimentale est l'élément recevant le traitement et sur lequel porteront les observations. Suivant le cas considéré, elle peut être une parcelle, un groupe d'arbres, un arbre, une feuille, un animal ou un lot d'animaux.

Dans le cadre de l'exemple 3.2, une parcelle sur laquelle sera semée une des variétés et recevant une des deux doses d'engrais définit une unité expérimentale.

Nous concevons facilement l'intérêt d'une définition précise de la nature, la forme et la taille de l'unité expérimentale lors de la planification. Le nombre d'unités expérimentales devra aussi être précisé.

3.5 La définition des mesures et observations

Des mesures ou observations seront réalisées au niveau de chaque unité expérimentale. Ces mesures ou observations sont les valeurs de variables, dites variables d'étude, prises sur l'unité considérée.

Les variables peuvent être réparties, suivant les valeurs qu'elles peuvent prendre, en variables quantitatives et qualitatives. Nous distinguons, parmi les variables quantitatives, les variables de nature :

- continue, par exemple le poids, le rendement, la hauteur ;
- discrète, par exemple le nombre d'épis, le nombre d'insectes.
- Parmi les variables qualitatives, nous distinguons les variables de nature :
- ordinales, c'est à dire celles qui permettent de classer les individus. Une variable qui prend les valeurs faible, moyen et fort est une variable qualitative ordinaire ;
- nominale (à plus de deux modalités), par exemple la couleur, la variété cultivée ;
- binaire (nominale à deux modalités), par exemple les variables qui prennent les valeurs **oui/non** ou présence/absence d'un caractère ;

Il est bien évident que la nature des mesures ou observations à réaliser est étroitement liée à l'objectif expérimental. Les méthodes et analyses statistiques porteront sur ces dernières et, de ce point de vue, il est important de réaliser ces mesures ou observations avec le plus grand soin.

Lorsqu'une mesure ou observation devrait être réalisée par échantillonnage, le plan d'échantillonnage devrait être défini avec toute la précision requise.

3.6 Le choix du dispositif expérimental

Le choix du dispositif expérimental se fait en fonction de l'objectif projeté, de la structure et du nombre de facteurs à étudier et des conditions ou contraintes expérimentales. Quelques dispositifs expérimentaux classiques sont brièvement présentés ci-dessus.

3.6.1 Le dispositif en randomisation totale

Un dispositif est dit en randomisation totale ou complètement randomisé lorsque les traitements sont affectés de manière totalement aléatoire aux différentes unités expérimentales.

Le choix d'un tel dispositif est adéquat lorsque les unités expérimentales sont relativement homogènes et s'adapte bien au cas où le nombre de répétitions par traitement *et ne* serait pas constant.

Du fait de la variabilité du matériel expérimental en agronomie, ces dispositifs sont rarement utilisés. En effet, lorsqu'on dispose d'informations a priori sur l'hétérogénéité des unités expérimentales, on gagnerait en précision en constituant des groupes d'unités expérimentales (blocs) assez homogènes entre elles.

3.6.2 Le dispositif en blocs complets randomisés

Un bloc peut être défini par un groupe d'unités expérimentales homogènes.

Un dispositif expérimental est dit en blocs aléatoires complets lorsque les traitements sont aléatoirement affectés aux unités expérimentales d'un même bloc.

La constitution des blocs doit ainsi être réalisée de manière à ce que la variabilité du phénomène étudié soit plus faible entre unités expérimentales d'un même bloc qu'entre unités expérimentales appartenant à des blocs différents. La constitution judicieuse des blocs exige ainsi une disposition d'information a priori.

Avec des critères pertinents pour la constitution des blocs, ce dispositif permet de contrôler l'hétérogénéité du milieu expérimental et de réduire alors l'erreur expérimentale. Il est ainsi plus efficace que le plan complètement randomisé.

3.6.3 Le dispositif en split plot

Le split plot ou dispositif en blocs complets avec parcelles divisées correspond à un plan en blocs avec deux facteurs étudiés dont les niveaux sont affectés aux unités expérimentales d'un bloc par étapes :

1. on commence par subdiviser chaque bloc en autant de sous blocs que de niveaux de l'un des facteurs (facteur dit secondaire), les niveaux de ce facteur sont alors aléatoirement affectés aux sous blocs d'un même bloc.
2. puis on affecte aléatoirement les niveaux de l'autre facteur (facteur dit principal) aux unités expérimentales de chacun des sous blocs.

Les comparaisons relatives au facteur secondaire seront moins précises que celles relatives au facteur principal. L'inconvénient du dispositif en split plot réside dans cette dissymétrie introduite entre les deux facteurs.

L'utilisation de ce dispositif se justifie par exemple lorsqu'il existe des contraintes pratiques liées à la répartition aléatoire des traitements à l'intérieur d'un bloc ou lorsqu'on s'intéresse plus particulièrement à l'un des deux facteurs et/ou à l'interaction entre ces facteurs.

3.6.4 Les dispositifs en blocs incomplets équilibrés

La taille des blocs est un facteur évident d'hétérogénéité au sein des blocs. En effet, la taille des blocs dépendant du nombre de traitements, l'homogénéité des unités expérimentales; constituant un bloc complet équilibré est rapidement compromise lorsque le nombre de traitements devient élevé. En outre, nous nous trouvons quelquefois dans l'impossibilité de constituer des blocs dans lesquels tous les traitements sont présents. La solution sera alors de constituer des blocs incomplets c'est à dire des blocs ne comportant qu'une certaine partie de; traitements étudiés.

Un plan en blocs incomplets est dit équilibré lorsque chaque couple de traitements est présent un même nombre de fois dans un bloc. Il est dit binaire lorsqu'un traitement est présent au plus une fois dans chaque bloc. La plupart des plans incomplets utilisés en expérimentation agricole sont en blocs incomplets équilibrés binaires.

Lorsqu'on se limite au cas où chaque bloc comporte le même nombre d'unités expérimentales et les traitements sont répétés un même nombre de fois, un dispositif en blocs incomplets équilibrés binaires vérifie :

$$pr = bk$$

$$\lambda = r(k - 1) / (p - 1)$$

p désignant le nombre de traitements, r le nombre de répétitions, b le nombre de blocs, k le nombre d'unités expérimentales par bloc et λ le nombre d'occurrences d'un couple de traitements dans un même bloc.

Le dispositif en lattices carrés équilibrés est un dispositif avec un réseau de blocs incomplets (bloc ligne et bloc colonne) tel que :

- la taille des blocs incomplets est la racine carrée du nombre de traitements.,
- les blocs peuvent être regroupés pour former des répétitions complètes (répliques) où chaque traitement est présent une fois et une seule,
- le nombre de répliques est égal à un plus la racine carrée du nombre de traitements,
- chaque couple donné de traitements se retrouve une fois et une seule dans un bloc ligne et aussi une fois et une seule dans un bloc colonne.

Ainsi pour disposer un essai en lattices carrés équilibrés, il est nécessaire que le nombre de traitements soit un carré parfait.

Exemple : Plan en lattices carrés équilibrés 3 x 3 avec $p=9$, $k=3$, $r=4$, $b=12$

Réplique 1	Réplique 2	Réplique 3	Réplique 4								
1	8	6	7	4	1	3	2	1	6	7	2
4	2	9	2	8	5	4	5	6	8	3	4
5	7	3	9	3	6	7	9	8	5	1	9

Avec un nombre de traitements $T = T_0 (T_0+1)$, nous pouvons constituer un dispositif en lattices rectangulaires, chaque réplique comprenant $(T_0 + 1)$ blocs de taille T_0 . Dans ce cas, un couple de traitements se retrouvera au plus une fois dans un même bloc.

3.7 La détermination du nombre de répétitions

Nous notons souvent un manque de critères objectifs dans la détermination du nombre de blocs et du nombre de sites d'un essai multilocal.

Le nombre de répétitions devrait être déterminé par la précision des résultats que l'on veut obtenir avec une certaine probabilité en fonction de l'objectif de recherche poursuivi et de la variabilité du matériel expérimental à utiliser. Nous pouvons utiliser des résultats

expérimentaux antérieurs ou organiser des essais préliminaires pour avoir une idée a priori de la variabilité du matériel expérimental.

3.8 La détermination, de la méthode d'analyse statistique

Il est fort utile d'envisager, dès la planification de notre expérience, la ou les méthodes adéquates d'analyse statistique des données qui seront collectées. Les principaux facteurs susceptibles d'orienter ce choix sont l'objectif poursuivi, la nature des données à analyser et les propriétés des méthodes statistiques à utiliser.

Le protocole expérimental devrait ainsi, présenter une définition des hypothèses expérimentales à vérifier, des paramètres à estimer, des méthodes Statistiques qui seront utilisées et une brève description des tableaux de résultats qui seront obtenus.

Ces divers éléments passés en revue constituent les principaux éléments du protocole expérimental. Nous proposons en annexe un canevas de protocole expérimental/

4 INTRODUCTION AU MODELE LINEAIRE

4.1 Présentation du modèle linéaire

Le modèle linéaire est le modèle de base de toute la modélisation statistique. Par ses propriétés mathématiques très intéressantes, il permet de décrire et d'analyser de très nombreuses et diverses situations expérimentales.

Un modèle linéaire unidimensionnel à effets fixes est un modèle s'exprimant sous la forme :

$$(1) Y = X \Theta + \varepsilon$$

où

- Y est le vecteur de dimension n des observations ;
- Θ est le vecteur formé des p paramètres du modèle ;
- X est une matrice à n lignes et p colonnes formée des valeurs des facteurs expliquant la variable étudiée ;
- ε est une variable aléatoire résiduelle à valeurs dans \mathbb{R}^n .

4.2 Hypothèses du modèle linéaire

On suppose que la variable aléatoire ε à valeurs dans \mathbb{R}^n suit une loi normale, centrée et de variance $\sigma^2 I_n$.

L'espérance mathématique du vecteur Y des observations est ainsi donnée par :

$$E(Y) = X \Theta.$$

Nous avons ainsi une décomposition du vecteur Y des observations en une composante fixe (l'espérance) et une composante aléatoire (résiduelle).

Exemple : modèle de régression linéaire

Lorsqu'on étudie l'effet d'une variable quantitative x (par exemple une dose d'engrais) sur une variable quantitative y (le rendement en grain d'une variété de mil), on peut choisir de rendre compte de cette expérience par la relation :

$$y_i = a + bx_i + e_i \\ i = 1, \dots, l,$$

avec l le nombre d'unités expérimentales, x_i la $i^{\text{ème}}$ dose d'engrais et y_i le rendement de la parcelle recevant la dose x_i . L'écriture matricielle de ce modèle est :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_l \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ e_2 \\ \vdots \\ e_l \end{pmatrix}$$

Exemple : modèle d'analyse de la variance

Pour comparer les effets de I variétés de mil sur le rendement, nous disposons de n parcelles expérimentales. Chacune des I variétés est semée sur J unités expérimentales tirées au hasard avec $n = IJ$.

Le modèle suivant d'analyse de variance permet de décrire et d'étudier une telle expérience :

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + e_{ij}$$

$$i = 1, \dots, I; j = 1, \dots, J.$$

Pour $I = 2$ et $J = 3$, l'expression précédente peut s'écrire :

$$\begin{bmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ y_{13} \\ y_{21} \\ y_{22} \\ y_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{11} \\ e_{12} \\ e_{13} \\ e_{21} \\ e_{22} \\ e_{23} \end{bmatrix}$$

Nous venons ainsi de voir que les modèles de régression linéaire et d'analyse de variance sont quelques exemples de modèle linéaire ; ils peuvent tous s'écrire sous la forme matricielle définie par (1).

4.3 Estimation des paramètres du modèle

L'estimation des paramètres du modèle linéaire utilise la méthode des moindres carrés. Cette méthode consiste principalement à chercher des valeurs estimées telles que la mesure de l'écart entre les valeurs estimées et observées soit la plus petite possible.

L'estimateur des moindres carrés \hat{Y} du vecteur aléatoire observé Y est défini par la projection orthogonale de Y sur le sous espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes de la matrice X . Ainsi \hat{Y} est le vecteur de ce sous espace qui minimise la somme des carrés des résidus :

$$S^2 = {}^t(Y - \hat{Y})(Y - \hat{Y}),$$

c'est à dire des écarts entre les valeurs observées et estimées.

Le vecteur \hat{e} des résidus défini par :

$$\hat{e} = Y - \hat{Y},$$

est une mesure de l'écart au modèle.

Nous pouvons montrer que l'estimateur $\hat{\Theta}$ de la matrice des paramètres Θ défini par la relation :

$$\hat{Y} = X\hat{\Theta},$$

vérifie l'expression suivante:

$${}^t X X \hat{\Theta} = {}^t X Y,$$

qui est un système de p équations à p inconnues.

Dans le cas où le rang r de la matrice X , c'est à dire le nombre de colonnes de X qui sont linéairement indépendantes, est égal à p (on dit dans ce cas que le modèle est régulier), ce système d'équations a une solution unique donnée par :

$$\hat{\Theta} = ({}^tXX)^{-1} {}^tXY.$$

Lorsque le rang de X est strictement inférieur à p (modèle singulier), le système est indéterminé ; il admet une infinité de solutions. Pour le rendre déterminé, il suffit d'introduire certaines contraintes linéaires sur les paramètres.

L'estimateur $\hat{\Theta}$ de la matrice des paramètres Θ est un estimateur sans biais de variance minimum. De plus, nous pouvons montrer que :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{S^2}{n - r}$$

est un estimateur sans biais de σ^2 de variance minimum.

On peut montrer en utilisant le théorème de Pythagore que:

$$\begin{aligned} {}^tYY &= {}^t\hat{Y}\hat{Y} + {}^t(Y - \hat{Y})(Y - \hat{Y}) \\ SCT &= SCM + SCR \end{aligned}$$

Cette expression consiste à dire que la somme des carrés totale (SCT) se décompose en la somme des carrés due au modèle (SCM) et la somme des carrés résiduelle (SCR). En d'autres termes, on dira que la variation totale du phénomène observé est composée d'une part de variation due au modèle statistique et d'une autre part de variation due à des effets aléatoires. Nous verrons dans la suite l'importance d'une telle décomposition.

4.4 Test d'hypothèses linéaires

Considérons que pour comparer les effets de I variétés d'arachide sur une variable donnée par exemple le rendement, nous disposons de n parcelles expérimentales. Chacune des I variétés est semée sur J unités expérimentales choisies de façon aléatoire avec $n = IJ$.

Le modèle statistique suivant permet de décrire et d'étudier une telle expérience :

$$\begin{aligned} y_{ij} &= \mu + \alpha_i + e_{ij} \\ i &= 1, \dots, I; j = 1, \dots, J \end{aligned}$$

avec y_{ij} et e_{ij} les valeurs respectives de la variable étudiée et de la variable résiduelle (erreur expérimentale) prises sur la $j^{\text{ème}}$ unité expérimentale recevant le traitement i .

L'expérimentateur peut être intéressé par la vérification de la validité de certaines hypothèses formulées au sujet de la population qu'il étudie. Un test d'hypothèses est un outil permettant de procéder à une telle vérification.

L'expérimentateur intéressé par la comparaison de I variétés d'arachide va tout d'abord chercher à savoir si le facteur variété a un effet sur le rendement.

Pour cela, il commence par émettre deux hypothèses :

- l'hypothèse H_0 à tester ou hypothèse nulle consistant à affirmer que la variété n'a pas d'effet sur le rendement, ce qui revient à écrire :

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_I = 0 ;$$

- l'hypothèse H_1 ou hypothèse alternative consistant à affirmer que le facteur variété a bien un effet sur le rendement, ce qui revient à écrire :

$$H_1 : \exists i \in \{1, 2, \dots, I\} \text{ tel que } \alpha_i \neq 0.$$

Ensuite une règle de décision permettant de faire un choix entre les hypothèses H_0 et H_1 sera construite. La variabilité inhérente à toute expérimentation peut nous emmener à commettre des erreurs dans nos prises de décision. Le tableau suivant présente les 4 situations qui peuvent se présenter avec les probabilités correspondantes.

		Situation réelle inconnue	
Décision prise	H_0 vraie	H_1 vraie	
Accepter H_0	Décision correcte Probabilité : $1-\alpha$	Décision incorrecte Probabilité : β	
Rejeter H_0	Décision incorrecte Probabilité : α	Décision correcte Probabilité : $1-\beta$	

L'une des deux décisions possibles à savoir :

- rejeter H_0
- 3 accepter H_0

peut être prise alors qu'elle est fausse.

Le risque de première espèce α ou niveau de signification du test est la probabilité de rejeter l'hypothèse nulle alors qu'elle est vraie.

Le risque de seconde espèce β est la probabilité d'accepter l'hypothèse nulle alors qu'elle est fausse et la puissance du test est la probabilité de rejeter l'hypothèse nulle quand elle est fausse.

Dans le cadre général du modèle linéaire, une hypothèse linéaire sur les paramètres est équivalente à une hypothèse sur l'expression du modèle. Par exemple, nous pouvons remarquer qu'accepter l'hypothèse H_0 définie par l'exemple 2, revient à dire que le modèle s'écrit :

$$y_{ij} = \mu + e_{ij}$$

$$i = 1, \dots, I; j = 1, \dots, J;$$

et accepter l'hypothèse alternative H_0 revient à dire que le modèle s'écrit :

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + e_{ij}$$

$$i = 1, \dots, I; j = 1, \dots, J.$$

Ainsi dans ce cadre général, dire que H_0 est vraie est équivalent à dire que le modèle s'exprime sous la forme :

$$(0) Y = X_0 \Theta_0 + e_0,$$

et dire que H_1 est vraie revient à dire que le modèle s'écrit :

$$Y = X \Theta + e;$$

l'indice 0 introduit dans (0) indique la prise en compte de l'hypothèse H_0 dans l'expression du modèle.

Le test de l'hypothèse H_0 contre H_1 qui est ainsi équivalent au test du modèle (0) contre le modèle (1) utilise la statistique de test :

$$U = \frac{S_0^2 - S^2}{S^2} \times \frac{n - r}{r - q},$$

avec S_0^2 et S^2 désignant respectivement la somme des carrés des résidus pour les modèles (0) et (1), q et r les dimensions respectives des sous espaces vectoriels engendrés par les colonnes de X_0 et de X .

On montre que la statistique U suit, lorsque H_0 est vraie, une loi de Fischer $F(r-q, n-r)$. Considérons u la valeur de U donnée par les résultats de l'expérience et $f(\alpha, r-q, n-r)$ le quantile de niveau α d'une loi de Fischer à $r-q$ et $n-r$ degrés de liberté. On décidera alors de rejeter ou d'accepter H_0 en comparant la valeur u à $f(\alpha, r-q, n-r)$:

- si $u \leq f(\alpha, r-q, n-r)$, on accepte H_0 ;
- si $u \geq f(\alpha, r-q, n-r)$, on rejette H_0 .

5 L'ANALYSE DE LA VARIANCE

5.1 Principes de l'analyse de la variance

La comparaison de différentes populations est un des problèmes les plus courants de la statistique. Le but principal de l'analyse de la variance (Anova) est de comparer les moyennes de plusieurs populations vérifiant certaines conditions à partir d'échantillons prélevés dans ces populations.

Considérons que lors d'une expérience, nous nous intéressons à l'étude sur n unités expérimentales, des variations d'une variable y (rendement par exemple) en fonction d'un facteur étudié composé de I modalités bien définies (variétés par exemple) ; les modalités du facteur étudié sont affectées de manière aléatoire aux unités expérimentales.

Une telle expérience peut être modélisée par l'équation suivante :

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}, \text{ avec } \varepsilon_{ij} \sim \text{iidN}(0, \sigma^2), \sum \alpha_i = 0 \\ i = 1, \dots, I ; j = 1, \dots, n_i ; n = \sum_i n_i$$

y_{ij} étant la valeur de la variable aléatoire y observée sur la $j^{\text{ème}}$ unité recevant le traitement i ;

μ est la moyenne générale ; α_i , appelé l'effet du traitement i , est l'écart entre la moyenne du traitement i et la moyenne générale ; et ε_{ij} est l'erreur résiduelle.

Afin de procéder à la comparaison des moyennes des traitements nous allons confronter, à partir des données observées, l'hypothèse nulle H_0 qui consiste à affirmer qu'il n'y pas d'effet dû aux traitements (c'est à dire que les traitements sont identiques) et l'hypothèse alternative H_1 qui revient à dire que les traitements ne sont pas identiques.

On peut montrer qu'on obtient l'expression suivante :

$$\sum_{ij} (y_{ij} - \bar{y}_{..})^2 = \sum_i (y_i - \bar{y}_{..})^2 + \sum_{ij} (y_{ij} - \bar{y}_i)^2 \\ SCT = SCM + SCR$$

Ceci montre que la variation centrée des observations est la somme de la dispersion due aux traitements (SCM) et d'une dispersion aléatoire (SCR). Ces sommes de carrés d'écart seront utilisés dans le test de H_0 contre H_1 .

En effet, on montre que, si H_0 est vraie, le rapport

$$F = \frac{SCM / (I - 1)}{SCR / (n - I)}$$

suit une loi de Fisher $F(I-1, n-I)$.

On calcule alors la probabilité sous H_0 qu'un $F(I-1, n-I)$ dépasse la valeur- F calculée et cette valeur sera ensuite comparée au seuil α fixé.

Si cette probabilité p est inférieure à α , l'hypothèse H_0 est rejetée : on dit alors que les traitements sont significativement différents au seuil α .

Si la probabilité p est supérieure à α , l'hypothèse H_0 est acceptée au seuil α .

5.2 Analyse de la variance à un facteur étudié

5.2.1 Anovn à un facteur en randomisation totale

Le tableau d'analyse de la variance à un facteur en randomisation totale se présente comme indiqué ci-dessous :

Tableau Anova à un facteur en randomisation totale

Source de variation	Degrés de liberté	Somme des carrés	Carré moyen	F
Traitement	t-1	SCA	CM1	CMA/CMR
Résiduelle	n-t	SCR	CMR	

t : nombre de traitements ; n : nombre d'unités expérimentales

L'hypothèse d'égalité des traitements sera rejetée au niveau α lorsque le rapport CMA/CMR dépasse la valeur $f_{t-1, n-t, \alpha}$ lue sur la table de la loi de Fisher.

Exemple : Etude de l'effet de 3 formulations fongicides sur rendement en gousses d'arachide

Pour comparer les effets de 3 formulations fongicides sur le rendement en gousses d'arachide, nous disposons de 12 parcelles expérimentales et chacune des formulations est affectée de manière aléatoire à 4 de ces parcelles. Il s'agit ainsi d'étudier un facteur à 3 niveaux avec un dispositif expérimental en randomisation totale.

Nous présentons ci-dessous les résultats de l'analyse des données réalisée avec le logiciel Genstat 5.

***** Analysis of variance *****

Variate:: Rendement

Source of variation	d.f.	S.S.	m. s.	v. r.	F pr.
Formulation	2	149447.	14123.	0.40	0.684
Residual	9	1698300.	185700.		
Total	11	1847746.			

d.f. = nombre de degrés de liberté ; s.s. = somme des carrés ; m.s. = somme des carrés moyens
v.r. = rapport des variances = rapport des carrés moyens (F); F pr. = p

L'examen du tableau d'analyse de variance permet de noter que :

$$F = 0.40 \text{ et } P_{110}(F(2,9) > 0.40) = 0.684$$

On en déduit alors que l'hypothèse d'équivalence des formulations ne sera pas rejetée au seuil 5%, ce qui revient à dire qu'il n'y a pas d'effet significatif de la formulation fongicide sur le rendement en gousses d'arachide.

5.2.2 Anova à un facteur dans un dispositif en blocs aléatoires complets

Un tableau d'analyse de la variance d'un plan à un facteur étudié en blocs aléatoires complets a la présentation suivante :

Tableau Anova à un facteur en blocs aléatoires complets

Source de variation	Degrés de liberté	Somme des carrés	Carré moyen	F
Traitement	t-1	SCA	CMA	CMA/CMR
Bloc	r-1	SCB	CMB	CMB/CMR
Résiduelle	(t-1)(r-1)	SCR	CMR	

t : nombre de modalités du facteur étudié ; r : nombre de blocs

Le résultat du test des effets blocs ne doit être pris en compte qu'à titre indicatif. En effet, l'essai n'a pas été réalisé pour tester l'équivalence des blocs. Mais ce test permet de vérifier si les blocs ont été judicieusement constitués c'est à dire si le contrôle par les blocs de l'hétérogénéité du milieu expérimental a été efficace.

Exemple : Comparaison de l'effet de 10 variétés sur le rendement du mil

Il s'agit d'un essai dont l'objectif est de comparer 10 variétés de mil. Le dispositif expérimental est en blocs aléatoires complets (3 blocs) et la variable observée est le rendement de la culture. Les résultats de l'analyse des données sont présentés ci-après.

***** Analysis of variance *****

Variate: Rendement

Source of variation	d.f.	S.S.	m.s.	v.r.	F pr.
Bloc stratum	2	312203.	156102.	1.89	
Bloc.*Units* stratum					
Variete	9	2324836.	258315.	3.13	0.019
Residual	18	1486045.	82558.		
Total	29	4123084.			

Le test **associé au** facteur variétal **nous** conduit à affirmer qu'il existe des différences significatives au seuil 5% entre les rendements des différentes variétés.

Nous remarquerons que Genstat ne fournit pas explicitement la probabilité associée au test d'absence d'effet bloc. Ainsi si nous nous intéressons au test de l'effet bloc, nous devrions comparer la valeur du F correspondant à la valeur seuil donnée par une table de Fisher.

On lit sur une table de Fisher la valeur $f(2;18;0.05) = 3.55$ et comme $1.89 \leq 3.55$, on en déduit l'absence d'effet bloc au seuil 5%. On peut ainsi dire que les blocs n'ont pas permis de contrôler de manière efficace l'hétérogénéité du milieu.

5.3 Analyse de la variance à deux facteurs étudiés

Avec deux facteurs étudiés, il faut tout d'abord s'intéresser au test de l'interaction. Si l'interaction n'est pas significative on peut tirer des conclusions sur les effets principaux des deux facteurs. Par contre lorsque l'interaction est significative il ne faut pas conclure directement. Il faut dans ce cas examiner les résultats de plus près car l'interprétation peut devenir plus complexe. Une représentation graphique est souvent fort utile pour une interprétation correcte des résultats.

Exemple

Considérons un essai dont le but est d'étudier l'effet de 2 facteurs, la variété et la dose d'engrais, sur le rendement d'une culture. Les graphiques suivants présentent différents cas de figure possibles.

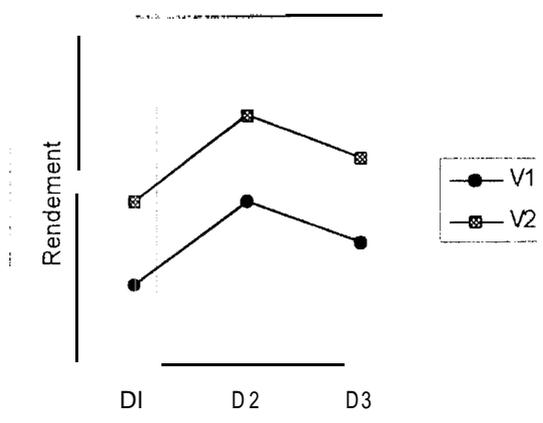


Figure 1 : Absence d'interaction

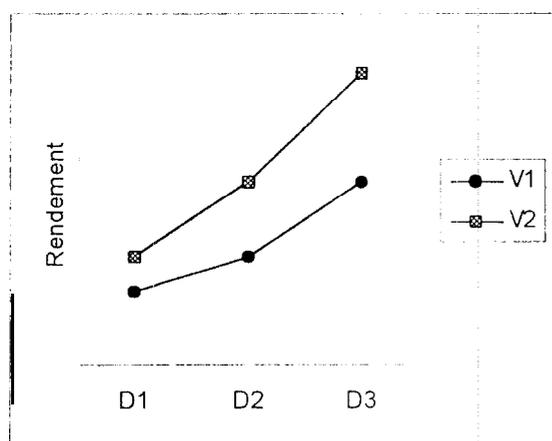


Figure 2 : Présence d'interaction

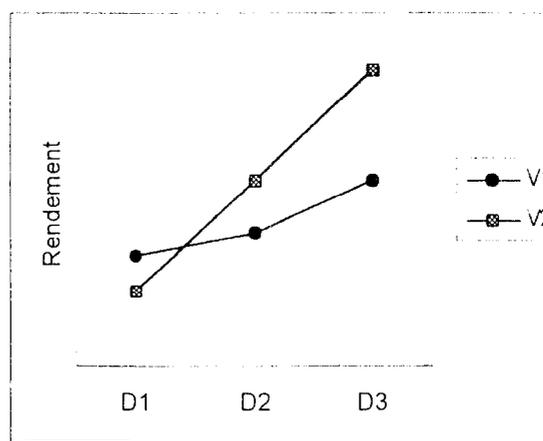


Figure 3 : Présence d'interaction

Nous pouvons noter d'après la figure 1 que l'écart entre les 2 variétés est indépendant de la dose d'engrais ; ce qui revient à dire qu'il n'y a pas d'interaction entre les 2 facteurs.

D'après les figures 2 et 3, on relève que les différences entre les variétés varient en fonction de la dose d'engrais utilisée. On dit alors qu'il y a une interaction entre les 2 facteurs

Dans le cas présenté par la figure 2, l'interaction a pour effet d'amplifier les différences entre les 2 variétés tout en conservant l'ordre des moyennes. Le test des effets dose et variété présente alors un intérêt.

Dans le cas présenté par la figure 3, l'interaction a pour effet d'inverser l'ordre des moyennes des variétés. Le test global des effets principaux des 2 facteurs perd son sens dans ce cas.

5.3.1 Anova à deux facteurs en randomisation totale

Le tableau d'analyse de la variance à deux facteurs étudiés dans un plan en randomisation totale se présente comme indiqué ci-dessous :

Tableau Anova à 2 facteurs en randomisation totale

Source de variation	Degrés; liberté	Carré moyen	F
Facteur A		CMA	CMA/CMR
Facteur B	J-1	CMB	CMB/CMR
Interaction AxB	(I-1)(J-1)	CMI	CMI/CMR
Résiduelle	IJ(r-1)	CMR	

I et J respectivement nombre de modalités des facteurs A et B ; r : nombre de répétitions

Exemple : Influence de différents régimes alimentaires sur la croissance pondérale

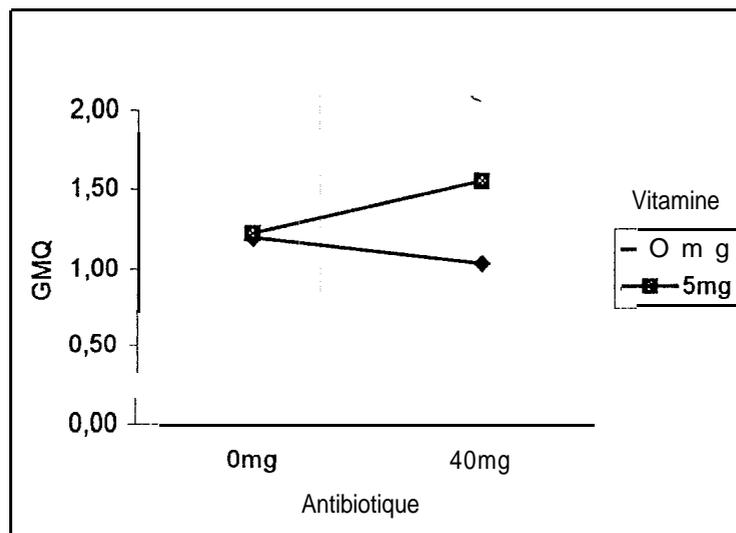
Il s'agit d'une expérimentation dont le but est d'étudier l'effet de deux facteurs, le supplément de vitamine B12 et le supplément d'antibiotique sur la croissance pondérale du porc. Chacun des deux facteurs a 2 niveaux (supplément, pas de supplément). Chacun des 4 régimes alimentaires ou traitement est apporté quotidiennement à un lot de 3 animaux choisis de manière aléatoire et le gain moyen quotidien de chaque porc est relevé à l'issue de l'expérience. Les résultats de l'analyse de la variance sont présentés ci-après :

***** Analysis of variance*****

Variate: GMQ

Source of variation	d.f.	s.s.	m. s.	v.l.	F pr.
Antibiotique	1	0.020833	0.020833	5.68	0.044
Vitamine	1	0.218700	0.218700	59.65	<.001
Antibiotique.Vitamine	1	0.172800	0.172800	47.13	<.001
Residual	8	0.029333	0.003667		
Total	11	0.441667			

L'examen de ces résultats nous permet tout d'abord d'affirmer que l'interaction des 2 facteurs étudiés est très hautement significative. L'existence d'une telle interaction signifie que l'influence du supplément d'antibiotique est fonction du supplément de vitamine. L'observation du graphique suivant permet d'avancer que la réponse au supplément d'antibiotique est fortement marquée en présence du supplément de vitamine alors qu'elle a même une tendance négative en son absence.



5.3.2 Anova à deux facteurs étudiés dans un dispositif en blocs aléatoires complets

Un tableau d'analyse de la variance d'un plan en blocs aléatoires complets à deux facteurs étudiés a la présentation suivante :

Tableau Anova à 2 facteurs en blocs aléatoires complets

Source de variation	Degrés de liberté	Carré moyen	F
Facteur 1	I-1	CM1	CM 1/CMR
Facteur 2	J-1	CM2	CM2 /CMR
Interaction	(I-1)(J-1)	CMI	CMI/CMR
Bloc	r-1	CMB	CMB/CMR
Résiduelle	(r-1)(IJ-1)	CMR	

I : nombre de niveaux du facteur 1 ; J : nombre de niveaux du facteur 2 ; r : nombre de blocs

Exemple : Etude de l'influence de l'application de différentes doses d'engrais azoté à des variétés de riz, sur le rendement de la culture

Il s'agit d'un essai disposé en 3 blocs aléatoires complets dont l'objectif est de comparer l'influence sur le rendement du riz de 5 traitements (4 doses d'engrais azoté et le témoin sans engrais) appliqués à 3 variétés de riz.

Le tableau suivant présente les résultats de l'analyse de la variance réalisée sur le rendement. On en déduit que l'interaction entre les 2 facteurs n'est pas significative. En outre, l'application

d'azote a un effet très hautement significatif sur le rendement du riz et les différences entre les rendements des variétés de riz sont significatives.

***** Analysis of variance *****

Variate: RENDEMENT

Source of variation	d.f.	s.s.	m.s.	V.r.	F pr.
BLOC stratum	3	2.5998	0.8666	5.73	
BLOC.*Units* stratum					
VARIETE	2	1.0528	0.5264	3.48	0.040
AZOTE	4	41.2347	10.3087	68.15	<.001
VARIETE.AZOTE	8	2.2907	0.2863	1.89	0.087
Residual	42	6.3528	0.1513		
Total	59	53.5309			

5.3.3 Anova à deux facteurs dans un dispositif en split plot

Un tableau d'analyse de la variance à deux facteurs étudiés dans un dispositif en split plot a la présentation suivante :

Tableau Anova à 2 facteurs en split plot

Source de variation	Degrés de liberté	Carré moyen	F
Facteur 1	I-1	CM1	CM 1/CMR1
Bloc	r-1	CMB	CMB/CMR1
Résiduelle 1	(I-1)(r-1)	CMR1	
Facteur 2	J-1	CM2	CM2/CMR2
Interaction	(I-1)(J-1)	CM 3	CM1/CMR2
Résiduelle 2	I(J-1)(r-1)	CMR2	

I : nombre de niveaux du facteur 1 ; J : nombre de niveaux du facteur 2 ; r : nombre de blocs

Exemple : Etude de l'effet de la fertilisation et de la variété sur la production du sésame

Il s'agit d'un essai réalisé en vue d'étudier deux facteurs la variété (5 variétés) et la fertilisation (2 niveaux de fertilisation dose de fertilisation et témoin non fertilisé). Le dispositif mis en place correspond à un split plot avec 3 blocs. La variété est en grandes parcelles et la fertilisation en petites parcelles.

L'examen des résultats présentés ci-dessous nous permet de dire que l'interaction entre les 2 facteurs variété et fertilisation n'est pas significative. De plus, l'effet de la fertilisation sur le rendement est significatif et il existe des différences très hautement significatives entre les rendements moyens des 5 variétés de sésame.

***** Analysis of variance *****

Variate: RENDEMENT

Source of variation	d.f.	S.S.	m.s.	v.r.	F pr.
BLOC stratum	2	536569.	268285.	21.14	
BLOC.VAR stratum					
VAR	4	810515.	202629.	15.96	<.001
Residual	8	101541.	12693.	1.29	
BLOC.VAR.TRAIT stratum					
TRAIT	1	97322.	97322.	9.85	0.011
VAR.TRAIT	4	69331.	17333.	1.75	0.214
Residual	10	98769.	9877.		
Total	29	1714048.			

5.4 Les méthodes de comparaison des moyennes

L'analyse de la variance nous permet de procéder au test de l'hypothèse d'égalité des traitements. Lorsqu'à l'issue du test on décide de rejeter cette hypothèse, c'est à dire qu'on déclare qu'il existe des différences significatives entre moyennes des traitements, il convient alors de déterminer, parmi celles-ci, celles qui sont significativement différentes.

Il existe différentes méthodes de comparaison des moyennes qui nous permettent de répondre à cette question. Mais il faut noter dès à présent qu'elles ne se valent pas toutes : le choix de l'une d'entre elles sera effectué judicieusement en fonction de l'objectif expérimental poursuivi et de la nature des traitements étudiés.

Par raison de commodité, on se limitera dans la suite au cas où les traitements sont répétés un même nombre de fois (plan équilibré)

5.4.1 La méthode de la plus petite différence significative

Lorsque l'hypothèse d'égalité des p traitements est rejetée, le test de Student nous permet de tester l'égalité des moyennes de deux traitements i et i' à l'aide de l'expression :

$$t_{obs} = \frac{|Y_i - Y_{i'}|}{\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_i^2 + \hat{\sigma}_{i'}^2}{n}}}$$

avec Y_i et $Y_{i'}$ les moyennes respectives des traitements i et i' ; $\hat{\sigma}_i^2$ et $\hat{\sigma}_{i'}^2$ les estimations des variances respectives des 2 traitements et n le nombre de répétitions

En considérant l'hypothèse d'égalité de la variance des traitements, cette expression devient :

$$t_{obs} = \frac{|Y_i - Y_{i'}|}{\sqrt{2 \frac{\hat{\sigma}^2}{n}}}$$

avec $\hat{\sigma}^2$ l'estimateur de la variance commune des traitements.

On calcule l'expression :

$$ppds = t_{1-\alpha/2} \sqrt{2\hat{\sigma}^2 / n}$$

et l'hypothèse d'égalité des 2 moyennes sera rejetée si la valeur observée de la différence entre ces moyennes est supérieure ou égale à cette quantité appelée plus petite différence significative (ppds).

Cette méthode est largement utilisée: en expérimentation agricole à cause de sa simplicité de mise en œuvre. Mais, il faut noter qu'avec p traitements, il existe $p(p-1)/2$ comparaisons de moyennes 2 à 2 qui peuvent ainsi être réalisées et donc autant de tests d'égalité de 2 moyennes. Le risque de 1^{ère} espèce de chacun de ces tests étant égal au niveau de signification α considéré, le risque global de 1^{ère} espèce, c'est à dire la probabilité de considérer à tort au moins une différence de moyennes comme significative peut être beaucoup plus important.

De ce point de vue l'utilisation de ce test n'est pas toujours appropriée. Elle est d'autant moins appropriée que le nombre de traitements étudiés devient élevé.

Exemple :

Une expérimentation est menée afin de comparer le poids de 1000 grains de 10 variétés de mil dans un dispositif expérimental constitué de 3 blocs aléatoires complets. L'analyse de la variance a mis en évidence un effet variétal significatif au seuil de 1%. Nous pouvons alors procéder à la comparaison multiple des moyennes.

$\hat{\sigma}^2 = 0.22$; nombre de degrés de liberté de la résiduelle = 18 ; $t_{1-\alpha/2} = 2.101$ avec $\alpha = 0.05$;

La valeur de la ppds est égale à 0.8046.

Les moyennes sont rangées ci-dessous par ordre décroissant. Les moyennes suivies de la même lettre ne sont pas significativement différentes.

V10 = 8.37	A
V5 = 7.87	AB
V1 = 7.23	BC
V9 = 7.13	BC
V2 = 7.10	BC
V7 = 6.97	C
V4 = 6.93	C
V8 = 6.90	C
V6 = 6.87	C
V3 = 6.63	C

5.4.2 La méthode de Bonferroni

La méthode de Bonferroni permet de tester toutes les comparaisons 2 à 2 de moyennes des traitements tout en contrôlant le risque global de 1^{ère} espèce α . Pour cela, chacun des tests sera réalisé avec un niveau de signification α' :

$$\alpha' \leq 2\alpha / p(p-1),$$

p étant le nombre de traitements étudiés.

Il faut souligner que cette méthode est assez conservative si p est élevé.

Exemple :

La comparaison des moyennes de l'exemple précédent en utilisant la méthode de Bonferroni nous fournit les résultats suivants :

$$ppds \text{ Bonferroni} = 1.48$$

V10	=	8.37	A
V5	=	7.87	A B
V1	=	7.23	A B
V9	=	7.13	A B
V2	=	7.10	A B
V7	=	6.97	A B
V4	=	6.93	A B
V8	=	6.90	A B
V6	=	6.87	B
V3	=	6.63	B

Les moyennes suivies de la même lettre ne sont pas significativement différentes.

5.4.3 La méthode de Newman et Keuls

L'amplitude d'un groupe de moyennes est définie par la plus grande différence entre 2 moyennes de ce groupe. Le principe de la méthode de Newman et Keuls repose sur la comparaison des amplitudes des groupes de k ($k \leq p$) moyennes à la plus petite amplitude attendue à un niveau de signification donné.

Un groupe de k moyennes est déclaré hétérogène, c'est à dire qu'il existe des différences entre les moyennes constituant ce groupe, si l'amplitude d_k du groupe est supérieure ou égale à la plus petite amplitude significative (ppas) relative à un groupe de k moyennes qui est définie par :

$$ppas(k) = q_{1-\alpha} \sqrt{\hat{\sigma}^2 / n},$$

$q_{1-\alpha}$ étant le quantile d'ordre α de l'étendue au sens de Student.

La mise en œuvre de cette méthode commence par la détermination de la ppas relative à p moyennes et la comparaison de l'amplitude observée des p moyennes à cette valeur.

Si l'amplitude observée ne dépasse pas la ppas, on dira alors que les p moyennes ne sont pas significativement différentes.

Lorsque l'amplitude observée est plus grande que la ppas relative à p moyennes, on comparera successivement l'amplitude des différents groupes de $(p-1)$ moyennes, $(p-2)$ moyennes, etc avec la ppas correspondante jusqu'à ce que l'amplitude observée d'un groupe soit inférieure à la ppas relative à ce groupe. Les moyennes constituant ce dernier groupe sont alors déclarées non significativement différentes.

Exemple : Comparaison des moyennes des variétés par la méthode de Newman et Keuls au seuil 5%

Nb de moyennes	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Valeurs ppas	0.80	0.917	1.07	1.14	1.20	1.25	1.29	1.33	1.36

V10 = 8.31 A
 V5 = 7.87 A B
 V1 = 7.23 B
 V9 = 7.13 B
 v2 = 7.10 B
 v7 = 6.97 B
 V4 = 6.93 B
 V8 = 6.90 B
 V6 = 6.87 B
 v3 = 6.63 B

5.4.4 La méthode de Dunnet

La méthode de Dunnet est une méthode de comparaison particulière en ce sens qu'elle ne porte que sur certaines comparaisons 2 à 2 de moyennes, la comparaison des (p-1) traitements à un traitement témoin. L'utilisation de cette méthode suppose ainsi la présence d'un traitement témoin (traitement de référence).

Un traitement sera déclaré significativement différent du témoin si l'écart entre la moyenne du traitement et celle du témoin est supérieur ou égal au plus petit écart significatif défini par :

$$d_{1-\alpha/2} \sqrt{2\hat{\sigma}^2 / n}$$

$d_{1-\alpha/2}$ est une valeur lue sur la table de Dunnet.

Exemple :

La variété V10 est en fait utilisée comme variété témoin dans cet essai. Ainsi nous allons comparer, par la méthode de Dunnett, la moyenne du poids de 1000 grains des 9 variétés à la moyenne de la variété témoin.

ppes au seuil de 5% = 1.13

V10	8.37	= Témoin
V5	7.87	
V1	7.23	
V9	7.13	< Témoin
V2	7.10	
V7	6.97	
V4	6.93	
V8	6.90	
V6	6.87	
V3	6.63	

Nous distinguons ainsi deux groupes de variétés :

- les variétés qui sont non significativement différentes du témoin
- les variétés qui ont un poids moyen de 1000 grains significativement inférieur au poids moyen du témoin.

5.4.5 La méthode des contrastes

Un contraste est une combinaison linéaire des moyennes des traitements telle que la somme des coefficients linéaires est nulle. Deux contrastes sont dits orthogonaux si la somme des double produits des coefficients linéaires est nulle.

La méthode des contrastes permet de tester la nullité de contrastes orthogonaux définis avant la réalisation de l'expérience. Chaque test de nullité d'un contraste correspond à une comparaison particulière bien définie.

On peut montrer que la somme des carrés des écarts factoriels se décompose en une somme de (p-1) sommes de carrés d'écarts correspondant à (p-1) contrastes orthogonaux. Ainsi le test de nullité d'un contraste revient à un test de signification de la somme des carrés des écarts correspondant.

Exemple:

On s'intéresse à la comparaison de l'effet de 2 nouveaux produits insecticides utilisés à 3 doses différentes sur la production du niébé. Deux autres produits serviront de référence. Neuf traitements seront ainsi étudiés dans un dispositif expérimental constitué de 4 blocs complets équilibrés.

Les traitements sont les suivants :

TO : Témoin absolu ; T1 : Produit P1 à la dose 1 ; T2 : Produit P1 à la dose 2 ; T3 : Produit P1 à la dose 3 ; T4 : Produit P2 à la dose 1 ; T5 : Produit P2 à la dose 2 ; T6 : Produit P3 à la dose 1 ; T7 : Produit de référence R1 ; T8 : Produit de référence R2.

Le tableau suivant présente le test de nullité de 9 contrastes orthogonaux.

MOYENNES DES +	S.C.E. ASSOCIEE	F	PROBA	COEFFICIENTS				COEFFICIENTS					
				TO	T1	T2	T3	4	T5	T6	T7	T8	
1467.77	1892.69	641970.63	7.33	0.0119	8	-1	-1	-1		-1	-1	-1	-1
1693.51	2116.25	1072275.63	12.25	0.0019	0	1	1	1		-1	-1	0	0
1904.88	1856.13	14262.47	0.16	0.6920	0	1	1	1		1	1	-3	-3
1846.20	1866.05	7881.04	0.01	0.9223	0	0	0	0		0	0	1	-1
1811.38	1634.57	83355.35	0.95	0.3408	0	-1	2	-1	0	0	0	0	0
2230.40	2059.18	78 177.86	0.89	0.3567	0	0	0	0	-1	2	-1	0	0
1693.70	1575.45	27966.13	0.32	0.5837	0	1	0	-1		0	0	0	0
1987.18	2131.18	41467.78	0.47	0.5046	0	0	0	0		0	-1	0	0

Le test de nullité du 1er contraste correspond à la comparaison des différents produits au témoin absolu. Nous notons ainsi que les produits insecticides ont un effet significatif sur la production de graines.

Aussi, on peut affirmer que le produit P2 assure une production plus élevée que le produit P1. Par contre, il n'y a pas de différence significative entre les nouveaux produits et les produits de référence.

5.4.6 La méthode des polynômes orthogonaux

Lorsque les traitements sont de nature quantitative, il est plus judicieux d'étudier la courbe de réponse aux traitements. Ce problème ne relève pas des méthodes de comparaisons multiples des moyennes des traitements mais de la méthode des polynômes orthogonaux qui permet d'ajuster une fonction polynomiale au phénomène observé. Son principe est basé sur la détermination de contrastes orthogonaux correspondant chacun à un polynôme d'un certain degré donné. La somme des écarts due aux traitements sera alors décomposée en différentes sommes des écarts relatives à des polynômes de degré 1, de degré 2, et cetera: le test de signification de ces différentes composantes sera réalisé.

Des tables nous donnent les coefficients des polynômes orthogonaux dans le cas particulier où les niveaux du facteur quantitatif sont équidistants..

Exemple :

On s'intéresse à l'étude de l'effet de la densité sur le rendement d'une variété de riz. Le dispositif expérimental est en blocs complets randomisés (4 blocs) avec 6 densités étudiées: (25, 50, 75, 100, 125 kg/ha).

Nous pouvons donc tester 5 polynômes orthogonaux. Il n'est toutefois pas nécessaire de procéder au test des différents polynômes. Nous nous limitons ici au test de signification des polynômes de degré ≤ 3 .

***** Analysis of variance *****

Variate: Rendement

Source of variation	d.f.	s.s.	m.s.	v.r.	F pr.
Bloc	3	.820401.	606800.	5.06	
Densité	5	2447293.	489459.	4.08	0.01.5
Linear	1	1806750.	1806750.	15.06	0.001
Quadratic	1	362217.	362217.	3.02	0.103
Cubic	1	46851.	46851.	0.39	0.541
Deviations	2	231474.	115737.	0.96	0.40.3
Residual	15	1799314.	119954.		
Total	23	6067008.			

***** Tables of means *****

Variate: Rendement

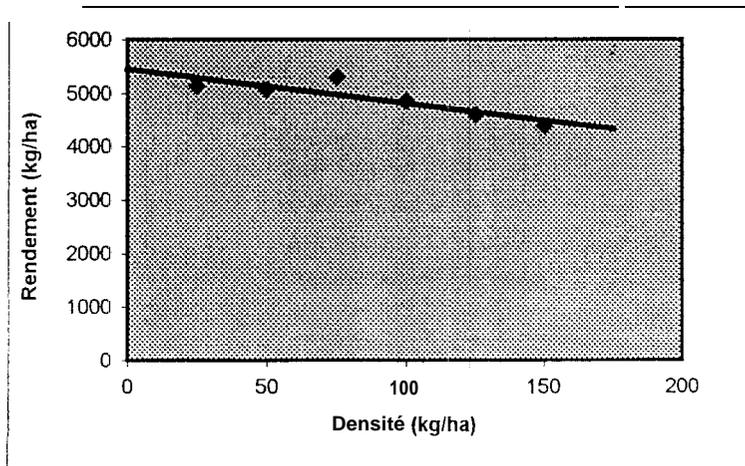
Grand mean 4885.92

Densité	25.00	50.00	75.00	100.00	125.00	150.00
	5124.00	5070.25	5304.25	4847.75	4591.00	4378.25

L'examen du tableau d'analyse de la variance nous permet de dire que la densité a un effet significatif sur le rendement en riz. De plus, l'utilisation de la méthode des polynômes orthogonaux permet d'avancer que l'effet linéaire est significatif et que les effets quadratiques et cubiques ne sont pas significatifs. Nous dirons que l'ajustement linéaire de la réponse du riz à la densité est significatif L'équation linéaire suivante :

$$y = -6.4 x + 5448.2$$

décrit la relation entre le rendement y et la densité x.



5.5 Validation des hypothèses de l'analyse de la variance

NOUS avons étudié brièvement le modèle linéaire et plus particulièrement le modèle d'analyse de la variance qui repose sur les hypothèses suivantes :

- 9 indépendance des variables aléatoires résiduelles
- 9 normalité des variables aléatoires résiduelles
- 9 égalité de la variance des variables aléatoires résiduelles
- 9 absence d'interaction traitement x bloc

Pour s'assurer de la validité du modèle et ainsi de l'interprétation des résultats, il est nécessaire de procéder à la vérification de ces hypothèses. L'analyse des résidus permet de vérifier la validité de ces hypothèses (analyse graphique et/ou tests d'hypothèses).

Lorsque ces hypothèses de l'analyse de la variance sont remises en cause nous devons suivant le cas:

- 9 utiliser des méthodes non paramétriques
- 9 choisir d'autres modèles tel que le modèle linéaire généralisé
- 9 procéder à une transformation de variables.

Certaines transformations de variable permettent, dans le cas où l'hypothèse d'égalité de la variance ne serait pas vérifiée, de réduire l'hétérogénéité des variances.

Les principales transformations de Variable utilisées en expérimentation agricole sont :

- 9 La transformation logarithmique :

Cette transformation permet de stabiliser les variances lorsqu'elles sont proportionnelles aux carrés des moyennes. Cette situation est souvent rencontrée dans les processus de croissance et de multiplication.

- 9 La transformation racine carrée :

Procéder à une telle transformation permet de stabiliser les variances dans le cas où elles seraient proportionnelles aux moyennes. Elle est recommandée pour les variables aléatoires possédant une distribution semblable aux distributions de Poisson. Ainsi, cette transformation s'adapte bien à des données constituées de nombres entiers pas très élevés ou à des pourcentages provenant de rapports ayant un même dénominateur et compris exclusivement entre 0 et 30% ou entre 70 et 100%.

- La transformation angulaire :

Lorsque la variable aléatoire à étudier possède une distribution binomiale, la transformation arc sinus est bien justifiée. Cette transformation est surtout adaptée aux problèmes relatifs aux proportions couvrant une gamme assez large (fractions comprises entre 0 et 1 ou pourcentages entre 0 et 100%) et données par des rapports à dénominateur constant.

6 PUISSANCE ET DIMENSIONNEMENT D'UNE EXPERIMENTATION

Toutes les différences de faculté des différents plans à mettre en évidence des effets de facteurs étudiés peuvent être expliquées par le calcul de la puissance associée à chaque comparaison. Le principe général est d'obtenir une résiduelle pour mettre en évidence l'effet souhaité qui soit la plus faible possible, mais avec un nombre de degrés de libertés suffisant. Ces deux démarches sont souvent antagonistes.

Cependant ces différents plans d'expérience sont imposés par des contraintes pratiques, ou une connaissance a priori, de l'homogénéité des unités expérimentales.

6.1 Rappel : test de Fisher lors d'une analyse de variance

Si lors d'une analyse de variance on cherche à tester l'effet d'un facteur A (n_1 degrés de liberté) par rapport à la résiduelle R (n_2 degrés de liberté), on effectue le rapport :

$$\frac{CM_a \text{ (carré moyen associé au facteur A)}}{CM_r \text{ (estimation de la variance } s^2 \text{ de la population)}}$$

Si ce rapport est égal à 1, alors l'effet A est confondu avec la variabilité de la population, et est donc déclaré non significatif.

Il faut donc calculer la probabilité que ce rapport soit égal à 1. On sait que cette variable suit une distribution de Fisher à n_1 et n_2 degrés de liberté.

On peut donc calculer la probabilité que le rapport étudié suive une loi de Fisher d'espérance égale à 1.

Si la valeur du rapport des carrés moyens est inférieure à la valeur prise par la variable de Fisher au seuil 5%, alors le rapport peut être assimilé à une variable de Fisher d'espérance 1, et l'effet A n'est pas significatif.

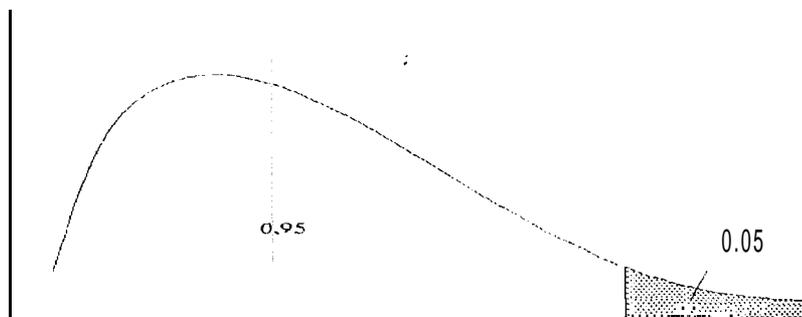


Figure 4 : Distribution d'une variable de Fisher

Si par contre la valeur du rapport des carrés moyens est supérieure à la valeur de F au seuil 5%, alors ce n'est pas une variable de Fisher d'espérance 1 et l'effet A est significatif.

La figure 5 présente les valeurs de la variable de Fisher au seuil 5% pour plusieurs valeurs de ses deux degrés de liberté.

Elle varie peu en fonction du degré de liberté du numérateur (qui est le nombre de niveaux du facteur A moins 1), mais plutôt en fonction du nombre de degrés de liberté du dénominateur (qui est le nombre de degrés de liberté du dénominateur).

Si par exemple la résiduelle est estimée avec 1 degré de liberté, le carré moyen associé au facteur A devra être entre 18 et 19 fois plus grand que la variance estimée (s^2).

Mettre en évidence l'effet d'un facteur si la résiduelle n'a qu'un degré de liberté est donc impossible. Si elle en a entre 2 et 4, l'effet A peut être mis en évidence s'il est élevé. D'une façon générale, il faut veiller à ce que la résiduelle ait au moins 5 degrés de liberté si l'on veut détecter l'effet d'un facteur.

De plus, le rapport des carrés moyens doit être le plus fort possible, c'est à dire qu'il faut que la variance estimée soit la plus faible possible, tout en lui conservant un nombre de degrés de liberté suffisant. Cette variance peut être diminuée :

- en regroupant des unités expérimentales en blocs. Si l'effet bloc existe, alors la résiduelle sera plus faible, mais comportera d'autant moins de degrés de liberté que le nombre de blocs sera élevé.
- en effectuant les observations avec précision : la résiduelle en sera réduite

Lors du choix d'un plan d'expérience, il faudra veiller à ce que la décomposition des degrés de liberté (propre à chaque plan d'expérience) laisse suffisamment de degrés de liberté à la résiduelle par rapport à laquelle doit être testé l'effet jugé intéressant par l'expérimentateur.

Plus la résiduelle (s^2) est estimée avec précision, plus la puissance du test est élevée. Il est ainsi indiqué d'améliorer cette estimation en limitant les effets parasites qui contribuent à la surestimer (hétérogénéité intra-unités expérimentales, hétérogénéité inter-unités expérimentales contrôlables par la constitution de blocs, erreur systématique sur les observations)

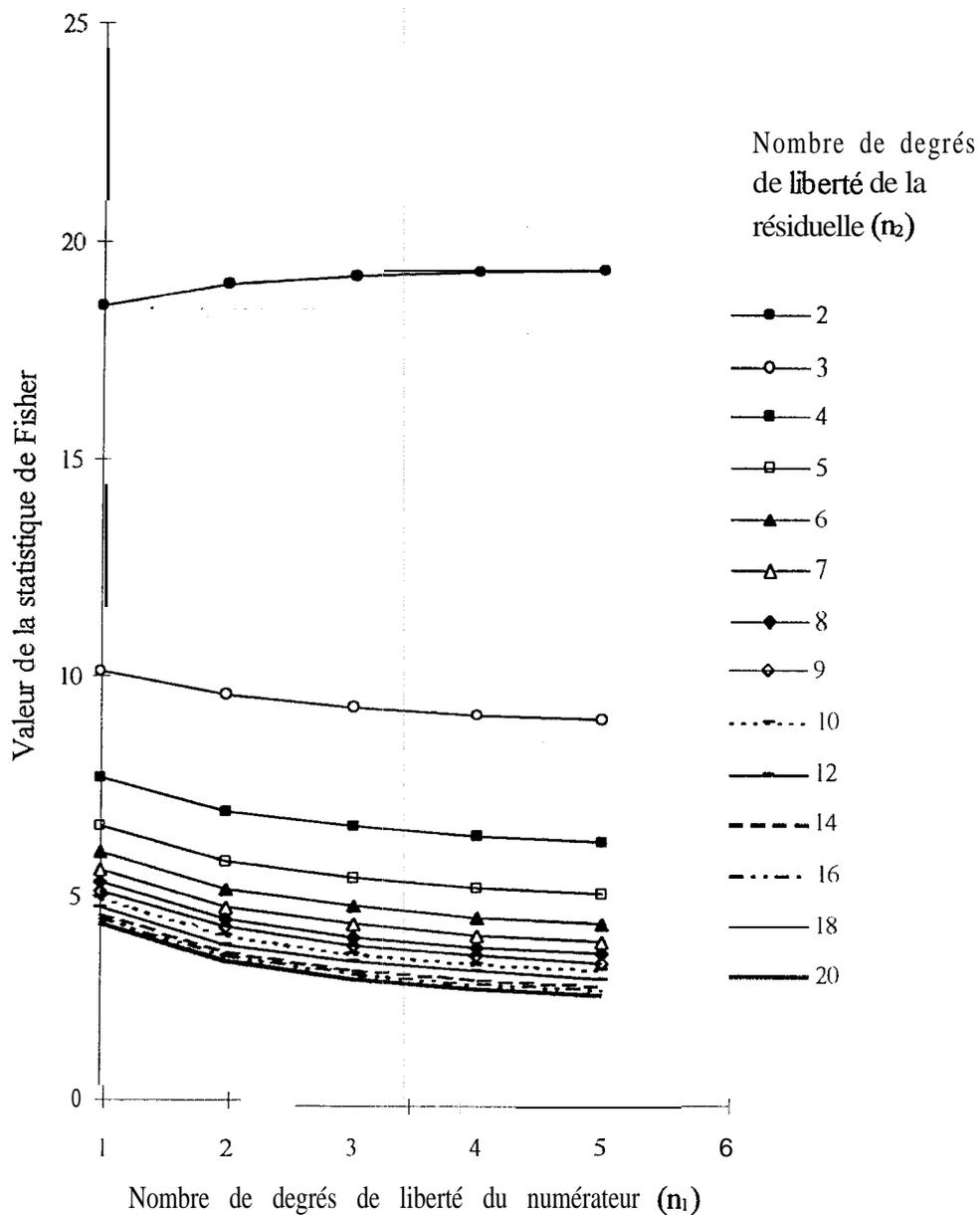


Figure 5 : Valeurs prises par une variable de Fisher à n_1 et n_2 degrés de liberté, avec une probabilité $p=0,05$

6.2 Calcul de la puissance d'une expérimentation

6.2.1 Puissance de la comparaison de deux niveaux d'un facteur

6.2.1.1 Calcul du nombre de répétitions d'un même traitement

On cherche à mettre en évidence une différence entre deux traitements A et B. n répétitions de chaque traitement sont effectuées.

On désigne par A_i la valeur de la variable analysée pour l'unité expérimentale à laquelle on a appliqué le traitement A et qui en est la $i^{\text{ème}}$ répétition.

On dispose à l'issue de l'expérience de n mesures de la différence d entre ces deux traitements:

$$d_i = A_i - B_i$$

La variable aléatoire d suit une loi normale. Son espérance est Δ , la différence réelle entre A et B. Son écart-type s_d ne peut être qu'estimé à partir de n observations. d suit donc une loi de Student d'espérance Δ et d'écart-type s_d .

La variable e définie par l'expression :

$$e = \frac{d}{s_d}$$

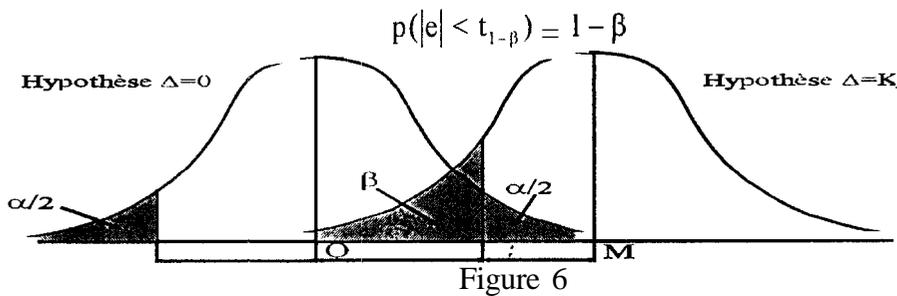
suit une loi de Student d'espérance Δ/s_d et d'écart-type égal à 1.

Si $\Delta=0$ (hypothèse nulle H_0), alors e suit une loi de Student $t(0,1)$. L'expérimentateur fixe α , risque de première espèce, qui est la probabilité de rejeter l'hypothèse nulle si elle est vraie.

On a alors :

$$p(|e| < t_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

Sous l'hypothèse H_0 , si la différence réelle entre les deux moyennes était Δ , alors e suivrait une loi de Student $t(\Delta/s_d; 1)$. La probabilité de conclure à une différence nulle (accepter H_0) alors que cette différence existe est le risque de deuxième espèce. Graphiquement, c'est la surface comprise sous la courbe de distribution de e dans le cas $\Delta \neq 0$, limitée par la valeur de t_α de l'hypothèse nulle. (voir figure n°6)



On constate graphiquement que :

$$t_{1-\alpha/2} + t_{1-\beta} = \frac{\Delta}{s_d}$$

s_d est l'écart-type de la différence entre les moyennes des deux traitements. Si la variance de la population est estimée à s^2 , et si les observations sur les traitements sont indépendantes, alors

$$\begin{aligned} \text{Var}(\Delta) &= \text{Var}(\bar{A} - \bar{B}) = \text{Var}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n A_i + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n B_i\right) = \frac{1}{n^2} \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) + \frac{1}{n^2} \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n B_i\right) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(A_i) + \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(B_i) = \frac{1}{n^2} \cdot 2n \cdot s^2 \end{aligned}$$

On peut donc déterminer le nombre de répétitions de chaque traitement par :

$$n = 2 \cdot \left(\frac{s}{\Delta}\right)^2 \cdot \left(t_{1-\alpha/2} + t_{1-\beta}\right)^2$$

- n : effectif de chaque traitement (si tous les traitements ont le même effectif).
- s^2 : variance estimée du matériel expérimental
- A : différence entre les moyennes de deux traitements.
- $t_{1-\alpha/2}$: variable de Student dont le nombre de degrés de liberté est celui de la résiduelle par rapport à laquelle est testé l'effet du facteur étudié, au seuil α . (test bilatéral).
- α : risque de première espèce.
- β : risque de deuxième espèce. $(1-\beta)$ est la puissance du test,

Si les traitements ne comportent pas le même nombre de répétitions, la démarche est analogue, et il faut simplement modifier le calcul de $\text{Var}(A)$:

$$\text{Var}(A) = \text{Var}(\bar{A} - \bar{B}) = \text{Var}\left(\frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^n A_i + \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^n B_i\right)$$

6.2.1.2 Utilisation du calcul du nombre de répétitions

Les quantités s et A peuvent être exprimées en valeurs relatives, c'est-à-dire en pourcentage de la moyenne :

$$CV(\%) = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100$$

$$A(\%) = \frac{\Delta}{\bar{x}} \cdot 100$$

Si la résiduelle comporte plus de 30 degrés de liberté, on peut alors remplacer la variable de Student par une variable qui suit une loi Normale $N(0, 1)$.

L'expérimentateur dispose donc d'une loi à 5 paramètres, qui lui permet d'en déterminer un dès lors que les quatre autres sont connus :

Mais le plan de l'expérience doit être déjà fixé, car le calcul fait intervenir le nombre de degrés de liberté de la résiduelle. Il est donc aisé, quand n et 3 autres paramètres sont fixés, de déterminer le quatrième.

Ce calcul devient complexe quand il s'agit de déterminer le nombre de répétitions de chaque traitement. De ce nombre dépend en effet le nombre de degrés de liberté de la résiduelle, qui sert à calculer les valeurs des variables de Student. Le nombre n apparaît donc trois fois et il est impossible de l'isoler.

En première approximation, on peut donc approcher la loi de Student par une loi normale, ce qui permet de déterminer un ordre de grandeur pour n, puis ensuite affiner ce résultat en reprenant la calcul avec des variables de Student (de degré de liberté égal aux nombre de degrés de liberté de la résiduelle).

Si l'on choisit $\alpha=0,05$ et $\beta=0,10$, alors on peut obtenir une première approximation de n par :

$$n = 21 \cdot \frac{s}{\Delta}^2$$

6.2.1.3 Exemple

Un expérimentateur désire mettre en évidence une différence de rendement entre deux variétés. Il estime le coefficient de variation, d'après des études antérieures dans des conditions analogues, à 5%. Son plan est un plan en randomisation totale. En choisissant $\alpha=0,05$ et $\beta=0,10$, il veut connaître le nombre de répétitions nécessaire pour mettre en évidence une différence de 10%.

Une première approximation de n est :

$$n = 21 \cdot \left(\frac{s}{\Delta}\right)^2 = 21 \cdot \left(\frac{5}{10}\right)^2 = 5,25$$

n est un entier donc une première approximation de n est $n = 5$

Un plan en randomisation totale à 5 répétitions de chacun des deux traitements laisse 8 degrés de liberté à la résiduelle.

Les valeurs suivantes sont extraites de la table de la loi de student :

$$t_{1-\alpha/2} = 2,306, t_{1-\beta} = 1,397$$

Ainsi

$$n = 2 \cdot \left(\frac{s}{\Delta}\right)^2 \cdot (t_{1-\alpha/2} + t_{1-\beta})^2 = 2 \cdot \left(\frac{5}{10}\right)^2 \cdot (2,306 + 1,397)^2 = 6,86$$

Une deuxième approximation de n est donc $n = 7$. Avec 7 répétitions par traitement, la variance résiduelle est estimée avec 12 degrés de liberté.

On a alors :

$$t_{1-\alpha/2} = 2,179, t_{1-\beta} = 1,356$$

d'où :

$$n = 2 \cdot \left(\frac{s}{\Delta}\right)^2 \cdot (t_{1-\alpha/2} + t_{1-\beta})^2 = 2 \cdot \left(\frac{5}{10}\right)^2 \cdot (2,179 + 1,356)^2 = 6,25$$

Une troisième approximation de n est donc $n = 6$. Avec 6 répétitions par traitement, la variance résiduelle est estimée avec 10 degrés de liberté.

On a alors :

$$t_{1-\alpha/2} = 2,228, t_{1-\beta} = 1,372$$

d'où :

$$n = 2 \cdot \left(\frac{s}{\Delta}\right)^2 \cdot (t_{1-\alpha/2} + t_{1-\beta})^2 = 2 \cdot \left(\frac{5}{10}\right)^2 \cdot (2,228 + 1,372)^2 = 6,48$$

La valeur de n est donc comprise en 6 et 7. On peut donc pour plus de sécurité choisir de répéter 7 fois chaque traitement.

6.2.2 Puissance d'une analyse de variance à un facteur comportant plusieurs niveaux

On considère ici une expérimentation qui vise à mettre en évidence l'effet d'un facteur comportant p niveaux. Chaque traitement est répété n fois.

Le modèle d'analyse de variance s'écrit :

$$E(X_{ij}) = \mu + \alpha_i$$

6.2.2.1 Hypothèse nulle et hypothèse alternative

L'hypothèse testée lors de l'analyse de variance est l'hypothèse nulle, qui considère que l'effet du facteur est nul.

$$H_0 : \forall i \in \{1, \dots, p\}, \alpha_i = 0$$

Dans le cas d'un facteur à deux niveaux, rejeter l'hypothèse nulle revient à affirmer :

$$A : \alpha_1 \neq \alpha_2$$

Mais dans le cas d'un facteur à plusieurs niveaux, plusieurs hypothèses alternatives sont possibles :

A₁ : $\alpha_1 \neq \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = a$, (un traitement différent des autres)

A₂ : $\alpha_1 = a, \alpha_2 \neq a, \alpha_3 = a, \alpha_4 = a$, (deux groupes de traitements)

A₃ : $\alpha_1 \neq a, \alpha_2 = \alpha_3 = a, \alpha_4 \neq a$, (un traitement plus faible et un plus fort)

Il y a plusieurs hypothèses alternatives, donc plusieurs degrés de fausseté de l'hypothèse nulle.

6.2.2.2 étermination du degré de fausseté de l'hypothèse nulle

On introduit une estimation du degré de fausseté de l'hypothèse nulle, écart-type des effets principaux α_i par rapport à leur moyenne 0.

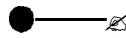
$$s_a = \sqrt{\frac{1}{P} \sum_{i=1}^p \alpha_i^2}$$

Cette variable est une donnée d'entrée. Elle doit être calculée. Il est difficile de connaître a priori les valeurs des effets des niveaux du facteur étudié. Il est possible de considérer 4 situations, qui sont les plus fréquemment rencontrées :

1. Les p moyennes se répartissent en deux groupes d'effectifs égaux (si p est pair) ou presque égaux (si p est impair), c'est-à-dire pour p=5 par exemple :

$$m_1 = m_2 > m_3 = m_4 = m_5$$

avec :



$$m_1 - m_3 = \delta$$

2. Toutes les moyennes sauf une sont supposées égales, ce qui donne par exemple pour p=5 :

$$m_1 > m_2 = m_3 = m_4 = m_5$$

avec :

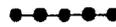


$$m_1 - m_2 = \delta$$

3. Les moyennes sont réparties uniformément entre les deux valeurs extrêmes, c'est-à-dire par exemple, toujours pour p=5 :

$$m_1 > m_2 > m_3 > m_4 > m_5$$

avec :



$$m_1 - m_2 = m_2 - m_3 = m_3 - m_4 = m_4 - m_5 = \frac{\delta}{4}$$

4. Toutes les moyennes sauf deux sont égales, les deux moyennes isolées étant supposées équidistantes du groupe central, ce qui donne par exemple :

$$m_1 > m_2 = m_3 = m_4 > m_5$$

avec :



$$m_1 - m_2 = m_4 - m_5 = \frac{\delta}{2}$$

Connaître la distribution attendue des moyennes permet de déterminer k, paramètre défini par l'expression :

$$k = \frac{s_a}{\delta}$$

Le tableau n°1 précise les valeurs de k pour plusieurs valeurs de p et pour les quatre distributions de moyennes précédentes.

P	Distribution des moyennes			
	1	2	3	4
2	0,500	0,500	0,500	
3	0,471	0,471	0,408	0,408
4	0,500	0,433	0,373	0,354
5	0,490	0,400	0,354	0,316
6	0,500	0,373	0,342	0,289
7	0,495	0,350	0,333	0,267
8	0,500	0,331	0,327	0,250
9	0,497	0,314	0,323	0,236
10	0,500	0,300	0,319	0,224

Valeurs de k, rapport de l'écart-type des moyennes à l'amplitude de leur différence

6.2.2.3 Calcul de la puissance d'une comparaison de plusieurs niveaux d'un facteur

Une série d'abaques a été mise au point (Pearson et Hartley, 1951) (voir annexe) qui permet l'utilisation d'une fonction reliant :

- ν_1 , nombre de degrés de liberté associés à la SCE pour le facteur étudié (ici p-1),
- ν_2 , nombre de degrés de liberté de la résiduelle qui teste l'effet du facteur,
- α , risque de 1^{ère} espèce,
- $1 - \beta$, puissance de la comparaison,
- Φ , paramètre de non-centralité.

Φ peut être déterminé de la façon suivante :

$$\Phi = \frac{k \cdot \delta \cdot \sqrt{n}}{\sigma}$$

Comme pour les facteurs comportant deux niveaux (§3.1), il est tout à fait possible de déterminer par exemple le nombre de répétitions d'un traitement pour atteindre un objectif fixé, ou de calculer la puissance d'une expérience déjà conçue.

6.2.3 Puissance d'une analyse de variance à plusieurs facteurs comportant plusieurs niveaux

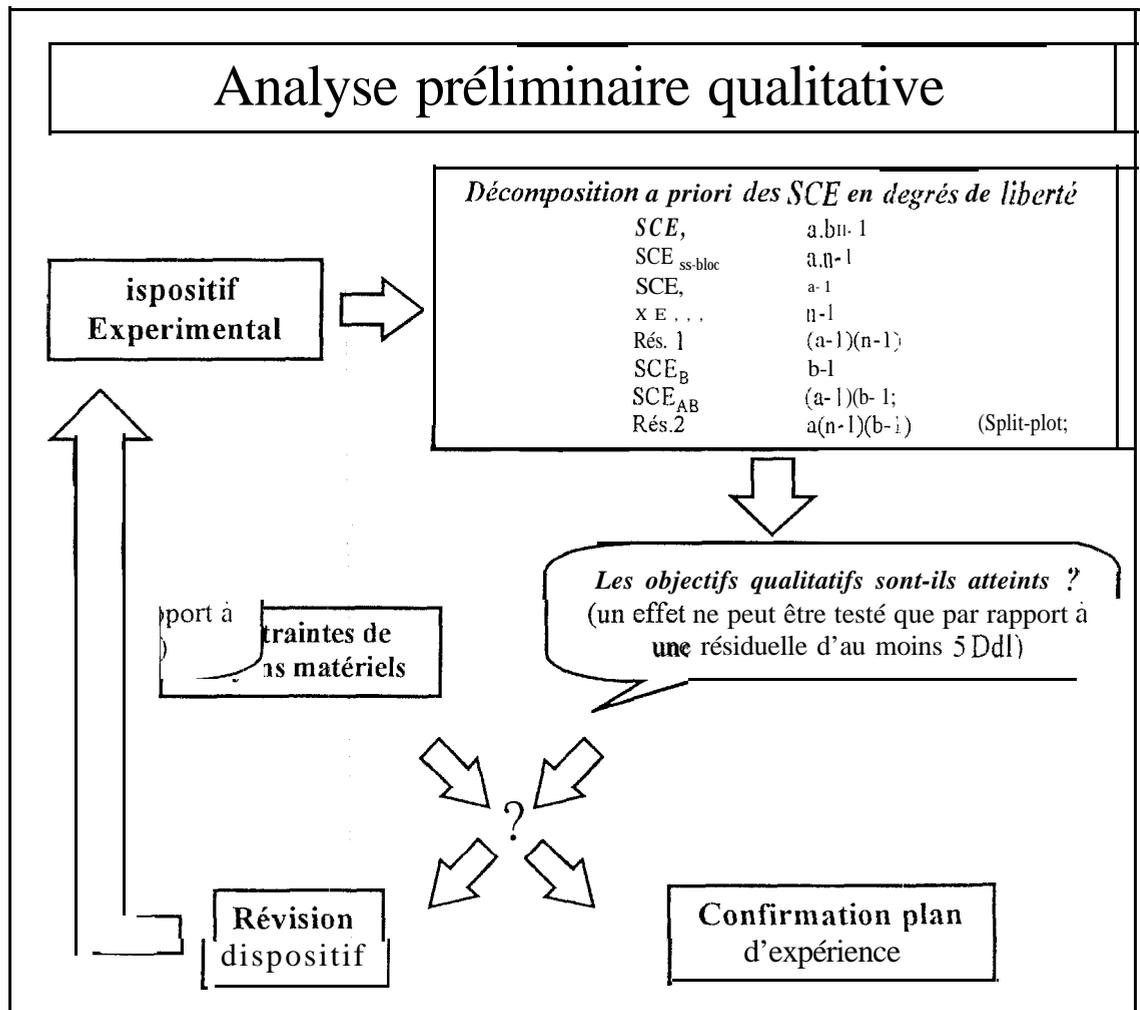
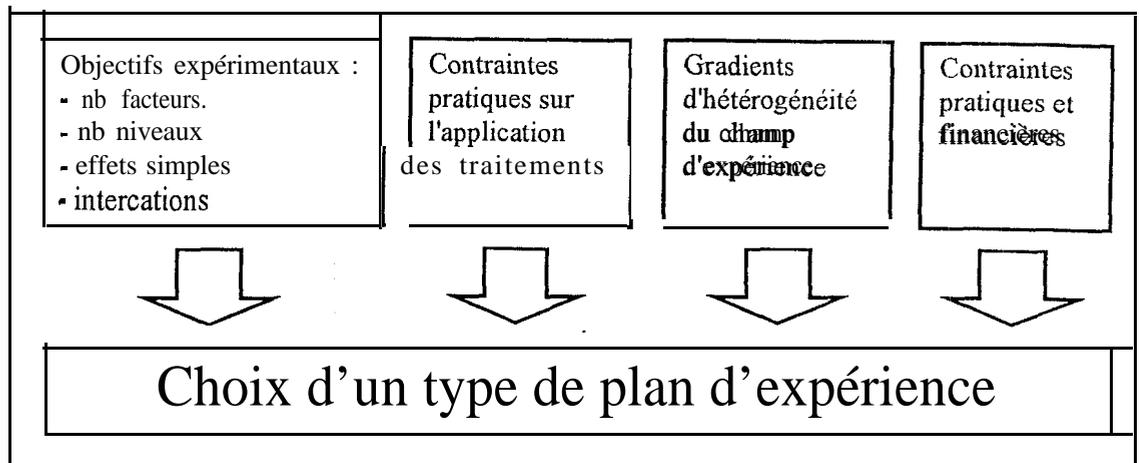
Dans le cas d'un modèle croisé fixe, l'utilisation des abaques est toujours possible, mais il faut considérer le nombre total de répétitions de chaque traitement.

Si p niveaux d'un facteur A et q niveaux d'un facteur B sont étudiés, alors le calcul de Φ pour les niveaux du facteur A se fera par :

$$\Phi = \frac{k \cdot \delta \cdot \sqrt{q \cdot n}}{\sigma}$$

6.3 Conclusion : démarche de choix d'un dispositif expérimental et dimensionnement de l'essai

|



Analyse quantitative : données d'entrée

**Objectifs de
risque
et de
puissance**



Risque de ne pas déceler l'effet d'un facteur : β



Risque de conclure à un effet qui n'existe pas : α

**Objectifs
quantitatifs
et intuitions
de l'expéri-
mentateur**



Valeur de la différence à mettre en évidence
(absolue ou relative) : A



Structure des effets des niveaux d'un facteur :
o-o-o-o-o ou o--o--o ou

**Moyens
disponibles**



Nombre de répétitions d'un même traitement : n

**Etude
biblio-
graphique**



Variance ou coefficient de variation du matériel
expérimental pour le facteur considéré : s^2 / CV
(dans des conditions analogues)

**Dispositif
expéri-
mental**



Nombre de degrés de liberté de la résiduelle qui
teste l'effet du facteur considéré: n_2

Détermination d'une variable à partir des 4 autres
(pour un facteur à deux niveaux par exemple)

$$n = 2 \cdot \left(\frac{s}{\Delta} \right)^2 \cdot \left(t_{1-\alpha/2} + t_{1-\beta} \right)^2$$

Exemple de diagnostic : n trop élevé

Diminuer s^2 la variance résiduelle par une observation appliquée des variables étudiées et une élimination des effets parasites qui tendent à la surestimer (distinguer des blocs ou augmenter le nombre de blocs)

Augmenter n_2 , le nombre de degrés de liberté de la résiduelle par un changement de dispositif expérimental (efficace surtout si celui-ci est inférieur à 8)

$$n = 2 \cdot \left(\frac{s}{\Delta} \right)^2 \cdot \left(t_{1-\alpha/2} + t_{1-\beta} \right)^2$$

Augmenter Δ , c-à-d n'espérer de l'essai que la mise en évidence de différences plus importantes

Augmenter α , c-à-d accepter un risque plus élevé de **conclusion positive fautive**

Diminuer $1-\beta$, la puissance, c-à-d diminuer la probabilité de mettre en évidence l'effet du facteur considéré

Dernière étape : préparer les observations

⇒ tirage aléatoire des individus sur lesquels seront effectuées les mesures

⇒ Préparation des fichiers de recueil et de traitement des données

7 LES REGROUPEMENTS D'ESSAIS

(D'après Philippe Letourmy, Cirad, 1992)

7.1 Introduction

La caractéristique essentielle d'un essai est de créer des conditions contrôlées. En effet, pour comparer des traitements, il faut qu'ils soient comparables, donc il faut se rapprocher de l'idéal : "toutes choses sont égales par ailleurs".

La conséquence est qu'un résultat d'essai est relatif à une situation particulière : celle créée par les conditions de l'expérience (par exemple, le précédent, les techniques culturales, les conditions climatiques, etc.).

Mais le problème est de passer d'un résultat de recherche (analytique) à une innovation vulgarisable en milieu paysan, dans une région qui peut être étendue. Il est assez naturel de multiplier le même essai dans des conditions fort diverses, et de voir si l'on a ou non le même résultat. On pratique ce que l'on appelle des essais multilocaux ou pluriannuels. Par essais pluriannuels, on entend des essais de même protocole expérimental, réalisés lors d'années différentes, à des emplacements différents et avec des randomisations indépendantes. Ceci exclut les essais pérennisés, c'est à dire conduits pendant plusieurs années sur les mêmes parcelles avec les mêmes traitements. L'analyse statistique des différentes unités d'un essai pérennisé relève de la méthodologie des mesures répétées et non de celle des regroupements d'essais.

7.2 Effets aléatoires – effets fixes

A un essai correspond l'ensemble de ses conditions de réalisation. Cet ensemble de conditions est appelé la situation de l'essai. Dans un regroupement d'essais, on cherche à obtenir une réponse des écarts entre traitements à des situations très diverses. Ceci revient à étudier l'interaction traitement*essai. Mais deux options sont possibles.

7.2.1 Effets aléatoires

On peut considérer que les essais regroupés forment un échantillon représentatif d'un vaste champ d'application (par exemple une région). Ils sont alors le résultat d'un tirage aléatoire dans un ensemble de situations, et on considère l'effet essai et l'interaction traitement-essai comme des effets aléatoires. L'objectif est ici de tester les écarts moyens entre traitements sur l'ensemble des situations par rapport à une base de référence qui est l'interaction traitement-essai. On parle de régionalisation de la réponse.

L'hypothèse qui facilite les calculs dans ce cas est de considérer que les moyennes des traitements dans chaque essai sont estimées avec la même précision. Donc, on suppose l'égalité des variances résiduelles divisées par le nombre de répétitions par traitement. C'est l'option qui est prise par le logiciel STATITCF pour faire l'analyse de variance du regroupement.

7.2.2 Effets fixes

L'autre option est de considérer que les essais regroupés forment un ensemble de situations ayant certaines caractéristiques (géographiques, pédologiques, culturales, etc.). On suppose alors que les résultats peuvent être généralisés aux situations ayant des caractéristiques proches. L'effet essai et l'interaction traitement-essai sont pris comme des effets fixes.

L'objectif est d'étudier l'interaction en tant que telle, en essayant de trouver les solutions adaptées à chaque situation. Tous les tests doivent alors être faits en prenant comme base de référence la variance résiduelle des essais. On parle de structuration de l'interaction (au sens large).

L'hypothèse habituellement faite dans ce cas (sauf par STATITCF) est de considérer que les données parcellaires sont obtenues avec la même précision. Donc on suppose l'égalité des variances résiduelles. Cette hypothèse n'est identique à la précédente que si le nombre de répétitions par traitement est constant.

On peut remarquer que le test de l'interaction traitement-essai la plus générale nécessite de faire des répétitions dans chaque essai.

7.3 Conditions de réalisation des essais multilocaux

Les séries d'essais peuvent être réalisées en milieu contrôlé : les essais se déroulent en station ou sur points d'observation, leur mise en place et leur suivi sont assurés ou contrôlés par les chercheurs. Ou bien elles peuvent être réalisées en milieu paysan (ou milieu réel, ou milieu semicontrôlé) : en général le chercheur assure ou contrôle la mise en place, l'application des traitements et les observations (dont la pesée de la récolte) ; le paysan assure le reste, à savoir la conduite de la culture selon ses propres techniques.

La justification essentielle des essais en milieu paysan est que la station, et plus généralement le milieu contrôlé, ne peut simuler ni toutes les contraintes ni tous les desiderata des paysans. Or ils peuvent s'exprimer dans des essais en milieu paysan.

Les essais que l'on prévoit de regrouper doivent avoir le même protocole, avec entre autres :

- les mêmes traitements (au minimum la plupart des traitements en commun),
- le même type de dispositif (randomisation totale, blocs complets, ou autres; tout en sachant que les regroupements de split-plots ou de criss-cross posent des problèmes avec STATITCF),
- la même surface parcellaire,
- si possible le même nombre de répétitions,
- mais des randomisations indépendantes

7.4 Analyse des séries d'essais

La procédure d'analyse se fait en trois étapes, avec des variantes selon l'option prise

7.4.1 Etape 1 : analyse des essais individuels

On procède à l'analyse de variance de chaque essai individuellement, et on isole les variances résiduelles (carré moyen résiduel ou Mean Square Error).

7.4.2 Etape 2 : sélection des essais de même variance résiduelle

Il s'agit de sélectionner des essais de même variance résiduelle ou bien de même rapport variance résiduelle sur nombre de répétitions selon ce qui est choisi. Si les nombres de degrés de liberté pour estimer les variances résiduelles sont identiques, on peut appliquer le test de HARTLEY (facile à faire):

Sinon le test de BARTLETT (plus puissant, mais plus lourd à calculer) peut être appliqué. Ces deux tests ne sont pas programmés sur STATITCF et doivent être faits à la main ou programmés spécifiquement pour cela.

Une macro rédigée sur Excel est disponible pour effectuer le test de Bartlett.

Si les variances résiduelles (resp. les rapports variance sur nombre de répétitions) ne sont pas égales, le plus fréquent est de constituer des groupes d'essais de même précision en écartant les essais à trop forte variance résiduelle (resp. rapport variance sur nombre de répétitions).

7.4.3 Etape 3 : analyse de variance du regroupement.

L'analyse différera selon l'option choisie (effets fixes ou aléatoires)

7.4.3.1 l'effet essai et l'interaction traitement-essai sont supposés aléatoires

Si les essais regroupés sont des plans en blocs complets, l'analyse statistique est réalisée au moyen du modèle

$$Y_{ijk} = \mu + A_i + j + C_{ij} + D_{ik} + E_{ijk}$$

où

Y_{ijk} est la donnée observée dans l'essai i , sur le bloc k et pour le traitement j .

μ est la moyenne générale,

A_i est l'effet aléatoire de l'essai i ,

j est l'effet du traitement j ,

C_{ij} est l'interaction essai i , traitement j (aléatoire),

D_{ik} est l'effet bloc k de l'essai i (aléatoire),

E_{ijk} est l'erreur résiduelle dans l'essai i , sur le bloc k , pour le traitement j (de variance π , σ^2)

Soit n_i le nombre de répétitions dans l'essai i , I le nombre d'essais, t le nombre de traitements
On définit :

$$n_0 = \sum_i n_i$$

$$Y_{i..} = \sum_j Y_{ij} / t$$

$$Y_{0j.} = \sum_i Y_{ij} / I \text{ (estime } \mu + j \text{)}$$

$$Y_{0..} = \sum_{ij} Y_{ij} / tI \text{ (estime } \mu \text{)}$$

Alors le tableau d'analyse de variance s'écrit

Variation	SCE	dl	CM	F
Traitement	$\sum_j I (Y_{0j.} - Y_{0..})^2$	$t-1$	$SCT/(t-1)$	CMT/CMI
Essai	$\sum_i t (Y_{i..} - Y_{0..})^2$	$I-1$	$SCE/(I-1)$	CMe/CMI
Interaction t*e	$\sum_{ij} (Y_{ij.} - Y_{i..} - Y_{0j.} + Y_{0..})^2$	$(t-1)(I-1)$	$SCI/(t-1)(I-1)$	CMI/CMR
résiduelle	$\sum_{ijk} (Y_{ijk} - Y_{i.k} - Y_{ij.} + Y_{i..})^2 / n_i$	$(t-1)(n_0-1)$	$SCR/(t-1)(n_0-1)$	-

La résiduelle est appelée aussi résiduelle pondérée. On teste l'interaction par rapport à cette résiduelle pondérée et l'effet traitement par rapport à l'interaction traitement-essai. D'où un classement global des traitements.

7.4.3.2 l'effet essai et l'interaction traitement-essai sont supposés fixes

Si l'effet essai et l'interaction traitement-essai sont supposés fixes (étude de l'interaction en tant que telle), et si les essais regroupés sont des plans en blocs complets, l'analyse statistique est réalisée au moyen du modèle

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \delta_{ik} + \varepsilon_{ijk}$$

Où

Y_{ijk} est la donnée observée dans l'essai i , sur le bloc k et pour le traitement j ,

μ est la moyenne générale,

α_i est l'effet de l'essai i ,

β_j est l'effet du traitement j ,

$(\alpha\beta)_{ij}$ est l'interaction essai i , traitement j ,

δ_{ik} est l'effet bloc k de l'essai i ,

ε_{ijk} est l'erreur résiduelle (de variance σ^2).

Le tableau d'analyse de variance s'écrit

Variation	SCE	dl	CM	F
Traitement	$\sum_i n_{0i} (Y_{.i} - Y_{...})^2$	$t-1$	$SCT/(t-1)$	CMT/CMR
Essai	$\sum_i t n_i (Y_{i..} - Y_{...})^2$	$I-1$	$SCe/(I-1)$	CMe/CMR
Interaction t*e	$\sum_{ij} n_i (Y_{ij.} - Y_{i..} - Y_{.j.} + Y_{...})^2$	$(t-1)(I-1)$	$SCI/(t-1)(I-1)$	CMI/CMR
Bloc	$\sum_{ik} t (Y_{i.k} - Y_{i..})^2$	$n_0 - I$	$SCB/(n_0 - I)$	CMB/CMR
résiduelle	$\sum_{ijk} (Y_{ijk} - Y_{i.k} - Y_{ij.} + Y_{i..})^2$	$(t-1)(n_0 - I)$	$SCR/(t-1)(n_0 - I)$	

Tout doit alors être testé par rapport à la variance résiduelle, car tous les effets sont fixes.

La première chose à voir dans ce tableau est le test de l'interaction traitement-essai. Si cette interaction est significative, l'analyse se poursuit pour essayer de la décrire ou de l'expliquer (structuration de l'interaction : au sens large).

Le logiciel STATITCF propose diverses méthodes d'études de l'interaction, mais en supposant que les erreurs résiduelles ε_{ijk} sont de variance $n_i \sigma^2$ (au lieu de σ^2). Ceci revient à supposer que les moyennes par traitement et par essai ont la même précision dans tous les essais. Cette hypothèse est identique à celle du modèle ci-dessus si le nombre, de répétitions est le même dans tous les essais.

Il existe un grand nombre de méthodes d'étude de l'interaction. On va passer en revue un certain nombre d'entre elles en considérant trois types de problèmes :

- 1 On cherche à constituer des groupes d'essais homogènes. On peut utiliser
 - des méthodes graphiques simples si le nombre d'essais est faible

- une analyse en composantes principales (ACP) non normée sur le tableau des interactions (essais en individus, traitements en variables, et à la croisée d'un individu i et d'une variable j la valeur de l'interaction $Y_{ij} = Y_{i..} - Y_{.j.} + Y_{...}$

- ou une classification automatique sur le même tableau.

2 On cherche à constituer simultanément des groupes d'essais et des groupes de traitements. On peut utiliser :

- la structuration visuelle (matrice de BERTIN),
- la méthode de CARAUX, qui est une manière automatique de faire la structuration ci-dessus,
- la classification automatique sur les lignes (essais) et sur les colonnes (traitements).
- Il faut noter que ces trois options sont proposées par STATITCF dans le module "structuration de l'interaction" (au sens strict).

3 On cherche à modéliser l'interaction. on peut utiliser

- la régression factorielle qui consiste à prendre en compte des covariables explicatives des essais et/ou des traitements,
- la régression conjointe ou modèle d'étude de la stabilité du rendement dans les essais variétaux. Ceci consiste à prendre comme covariable la moyenne par essai des variétés communes à tous les essais.

La régression factorielle est disponible sur STATITCF, contrairement à la régression conjointe.

7.5 Etude d'un exemple

Amendements phosphorés du niébé, région de Manaus, Brésil, 1990 (J. Russel)

Quatre traitements sont comparés dans 4 environnements :

Code	Traitement
TA	témoin de l'agriculteur,
EOT	engrais organique urbain traité,
SPT	super phosphate triple
EP	engrais de poulet

Chaque essai est un dispositif complètement randomisé, comprenant trois répétitions

L'objectif de l'essai est de déterminer le meilleur traitement à appliquer dans la région. Il s'agit d'une problématique de régionalisation de réponse. L'effet environnement et l'interaction traitement-environnement sont donc des effets aléatoires.

7.5.1 Etape 1 : analyse des essais individuels

Analyse de variance (site n°2) (statitcf)

Variation	S.c.e.	Ddl	Carrés moyens	Test F	Proba	E.t.	C v
Var.totale	1.39	11	0.13				
Var.facteur 1	1.20	3	0.40	16.61	0.0010		
Var.residuelle 1	0.19	8	0.02			0.16	6.9%

On procède de même pour les autres environnements, et l'on obtient le tableau de variances résiduelles suivant :

Environnement	Variance résiduelle	Ddl
1	0.03	8
2	0.02	8
3	0.02	8
4	0.01	8

7.5.2 Etape 2 : sélection des essais de même variance résiduelle

Site

1	Var. res.	0,03
	Ddl	8
2	Var. res.	0,02
	Ddl	8
3	Var. res.	0,02
	Ddl	8
4	Var. res.	0,01
	Ddl	8
	Chi ² th	7,8
	Chi ² Bartlett (observé)	2,2

Le Chi² Bartlett (calculé à partir de la macro Excel) est inférieur au Chi² théorique. Les variances peuvent donc être considérées comme homogènes et les quatre essais pourront être utilisés dans le regroupement.

Pour pouvoir conduire cette analyse sous STATICEF, il faut, à la fin de l'analyse de variance, choisir l'option « conserver les moyennes pour un regroupement », et enregistrer un fichier de moyennes pour chaque essai.

7.5.3 Etape 3 : analyse de variance du regroupement.

Le module « regroupement d'essais » de STATICF permet de construire le fichier de moyennes à partir des fichiers individuels sauvegardés précédemment. On obtient alors l'analyse de variance suivante :

Source de variation	S.c.e	Ddl	Carres moyens	Test f	Rap.cm	F calc	D d l f	Proba
A : totale	8,90	15	0,59					
B : facteur 2	5,26	3	1,75					
C : facteur 1	2,67	3	0,89	C/d	8,27	3/9		0,0062
D : inter f2*f1	0,97	9	0,11	D/e	4,77	9/ 32		0.0005
E : résiduelle pondérée		32	0.02					

Facteur 1 : Phos

Facteur 2 : Env

L'interaction Phos*Env est significative. La réponse ne peut donc pas être régionalisée. Il faut donc étudier l'interaction plus profondément pour pouvoir conclure.

Sous Genstat on peut utiliser le module REML, qui permet d'analyser des modèles mixtes (combinant effets fixes aléatoires et fixes). Dans cet exemple, il suffit de déclarer le facteur « Phos » comme effet fixe, et les facteurs « Site » et « Bloc » comme effets aléatoires.

Le facteur « Bloc » est inclus dans le facteur « Site », c'est à dire par exemple que le bloc 1 du site i n'a aucun lien avec avec le bloc 1 d'un autre site. Le facteur « Bloc » n'a de sens qu'au sein du site. C'est donc l'interaction Site*Bloc qu'il faut étudier. On parle d'« effets inclus » (en anglais « nested effects »). Il convient alors de déclarer les effets aléatoires comme suit :

SITE/BLOC (Bloc inclus dans Site)

Genstat propose alors la valeur de la statistique de Wald, qui teste l'effet fixe. Son degré de significativité se teste par un test de Chi*, par la commande suivante (dans le cas d'une statistique de Wald d'une valeur de 69.8, à 3 degrés de liberté) :

```
calcstr=1-chisq(69.8;3)
print str
```

On conclut à un effet fixe significatif si la probabilité associée est inférieure au risque de première espèce (α).

8 L'ANALYSE D'ADAPTABILITE : UNE METHODE POUR LA MISE AU POINT DE L'ANALYSE DE SESSAIS EN MILIEU REEL

(D'après John T. Russel, 1996)

8.1 Objectifs:

L'objectif de l'analyse d'adaptabilité est de déterminer le domaine d'adaptation de recommandations agronomiques.

Elle permet d'exploiter les données recueillies dans un dispositif en blocs dispersés, qui ne permet pas d'isoler l'effet site du fait de l'absence de répétitions intra-sites.

Elle permet également d'interpréter un regroupement d'essais dans lequel apparaît significativement une interaction traitement*environnement. La réponse ne peut alors être régionalisée, et une étude de l'interaction est alors nécessaire.

8.2 Données nécessaires :

Les données nécessaires à l'analyse d'adaptabilité sont de deux types :

Des données analytiques, recueillies dans un dispositif qui peut être une série d'essais ou des blocs dispersés multilocaux et/ou multiannuels. Ces données doivent être le résultat de la comparaison d'objets, c'est à dire être issues d'essais factoriels. Dans l'étude, le terme « environnement » est utilisé. Il désigne aussi bien un site, une année, ou un bloc isolé.

Des données de caractérisation des environnements, permettant de décrire à partir d'informations qualitatives ou quantitatives les spécificités de chaque localisation d'essai.

8.3 Conduite de l'analyse environnementale :

Il s'agit d'une série d'étapes, qui font intervenir

des méthodes graphiques intuitives, qui exigent la maîtrise de logiciels du type tableur

des méthodes statistiques, pour valider les conclusions des analyses graphiques

En aucun cas il ne faut s'arrêter aux techniques graphiques, celles-ci faisant intervenir des méthodes biaisées. Les procédures statistiques, permettent de valider les regroupements qui ont été pressentis dans l'analyse graphique.

Les étapes sont présentées succinctement, à titre de synthèse. Il est en effet plus aisé de suivre l'analyse à partir d'un exemple.

8.3.1 Calculer une mesure de la performance de chaque environnement :

L'indice environnemental permet d'évaluer le potentiel de l'environnement considéré. Il est calculé à partir de la moyenne de la performance de tous les traitements dans un environnement donné.

8.3.2 Estimer et modéliser la réponse des traitements à l'environnement

A partir d'un graphique présentant en ordonnée la variable étudiée pour un traitement donné et en abscisse l'indice environnemental (IE), un ajustement linéaire ou non linéaire permet de modéliser la réponse des traitements à l'IE.

8.3.3 Définir des domaines de réponse équivalente des traitements à l'environnement

La synthèse sur un même graphique des modèles de réponse de tous les traitements permet de définir graphiquement des zones où les mêmes recommandations semblent s'appliquer. Ces zones, où le classement des traitements est le même, doivent comporter plusieurs environnements. Elles sont ci-après dénommées « domaines ».

8.3.4 Valider la constitution des domaines

Un domaine regroupe plusieurs environnements. Chacun de ces environnements est considéré comme un bloc. Pour mener une analyse de variance au sein de ce domaine, il faut s'assurer de l'homogénéité des blocs. Ceci nécessite d'intervenir un test de Bartlett sur les variances de chaque bloc. On calcule donc la variance de chaque bloc, et on compare ces variances entre elles.

Si les variances sont homogènes, alors on peut passer à l'étape suivante. Sinon il faut revoir la constitution des domaines, en excluant au besoin des blocs qui introduisent une différence de variance trop importante.

8.3.5 Mener une analyse de variance par domaine

L'étape précédente a permis de s'assurer qu'une analyse de variance par domaine était possible. Celle-ci doit mettre en évidence que l'interaction environnement*traitement n'est pas significative. Les conclusions au sein du domaine considéré s'appliquent à tous les environnements du domaine. Celui-ci est homogène. Si l'interaction est significative, alors il faut revoir la constitution des domaines.

8.3.6 Effectuer une anova sur le regroupement des domaines

A partir des analyses de variance individuelles de chaque domaine, un regroupement d'essais permet de s'assurer de l'indépendance des recommandations de chaque domaine. Si l'interaction domaine*traitement est significative, alors l'effet du traitement n'est pas généralisable à tous les domaines, ce qui justifie leur constitution.

8.3.7 Formuler des recommandations indépendantes dans chaque domaine

A partir des classements de moyennes obtenus par les analyses de variance individuelles de chaque domaine, on peut identifier les recommandations propres à chaque domaine.

8.3.8 Expliquer l'indice environnemental par des variables caractéristiques du milieu

Cette étape est parmi les plus délicates. Elle détermine l'applicabilité des conclusions de l'analyse.

Il s'agit de tenter d'expliquer les différences entre sites, mesurées par l'IE, par les variables caractéristiques du milieu relevées dans chaque site. Cette étape peut faire intervenir

des méthodes de régression simple (modélisation de l'IE par des variables du milieu),

des méthodes de régression multiple (modélisation de l'IE par une somme de variables du milieu, celles-ci pouvant être sélectionnées automatiquement à partir d'une procédure du type « stepwise »),

des méthodes multivariées (ACP pour identifier les variables qui représentent le mieux la variation totale des sites)

8.3.9 formuler les recommandations en termes de caractéristiques du milieu

L'étape précédente a permis de caractériser les environnements, donc par voie de conséquence les domaines qui les regroupent. Les recommandations formulées au niveau du domaine peuvent alors être élargies à des caractéristiques environnementales, pour être validées ultérieurement dans d'autres environnements.

8.4 Etude d'un exemple

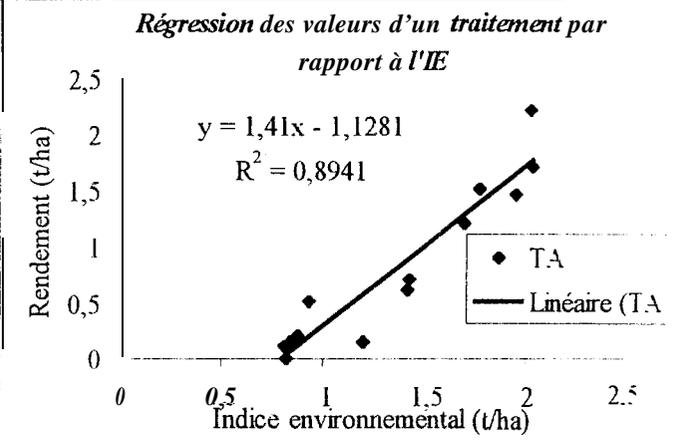
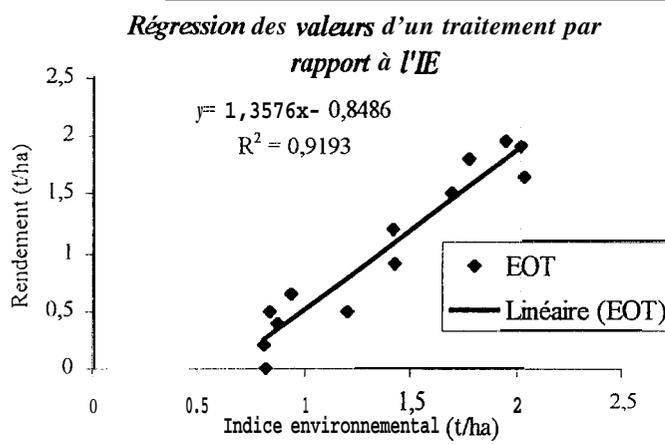
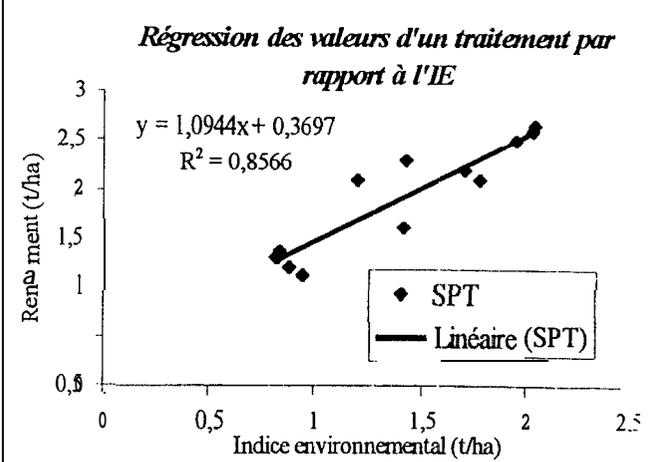
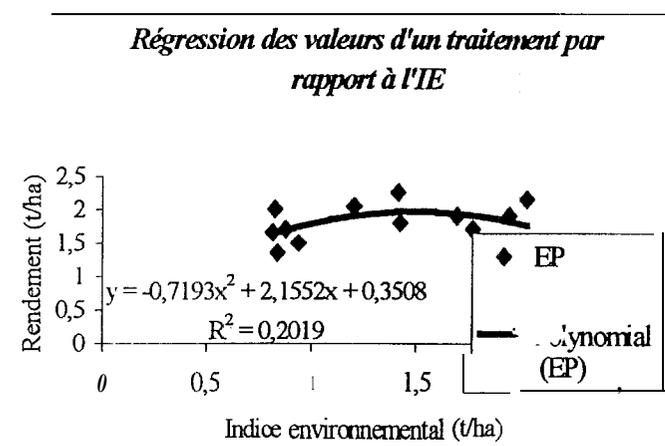
8.4.1 Les données

Environnement	TA	EOT	SPT	EP
7	1,7	1,65	2,65	2,15
10	2,2	1,9	2,6	1,4
3	1,45	1,95	2,5	1,9
12	1,5	1,8	2,1	1,7
11	1,2	1,5	2,2	1,9
1	0,7	0,9	2,3	1,8
4	0,6	1,2	1,6	2,25
5	0,15	0,5	2,1	2,05
2	0,5	0,65	1,1	1,5
9	0,2	0,4	1,2	1,7
6	0,15	0,5	1,35	1,35
13	0	0	1,3	2
8	0,1	0,2	1,3	1,65

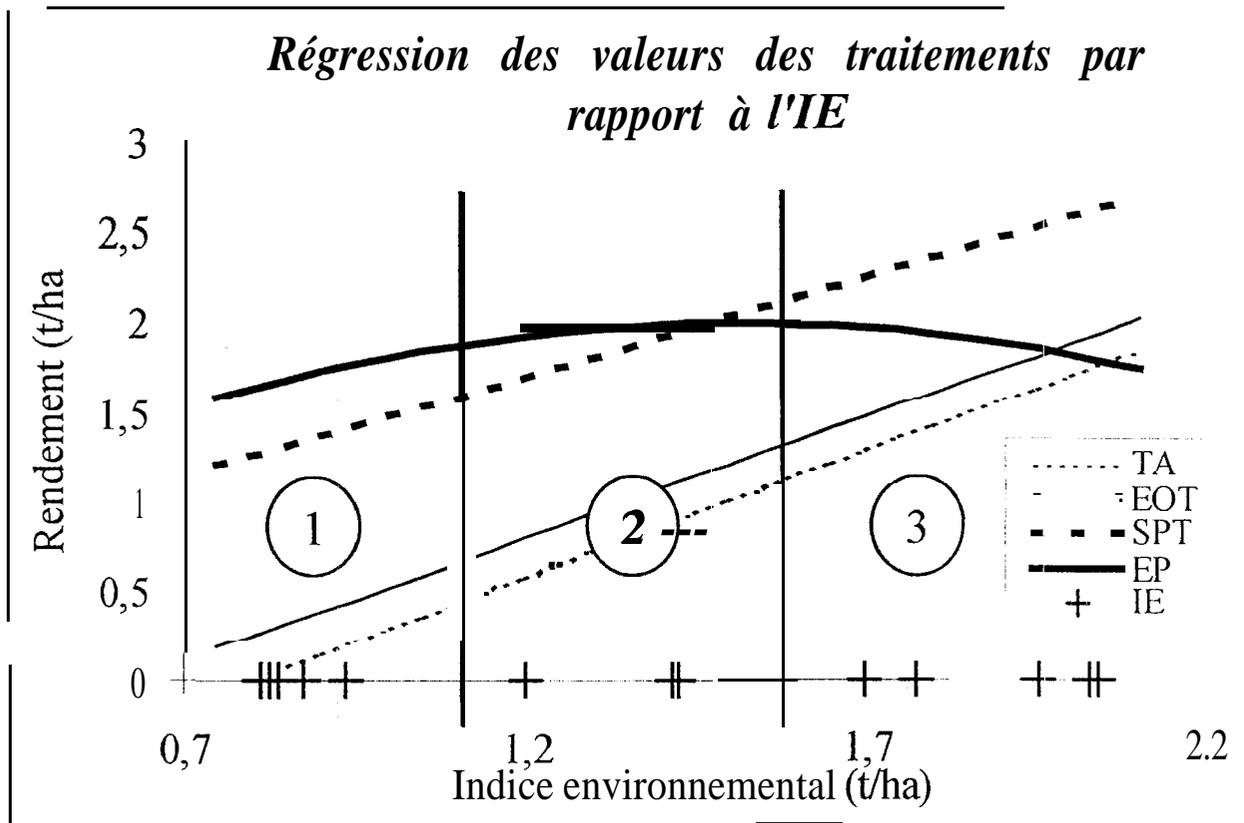
8.4.2 Calcul de l'indice environnemental

Environnement	IE
1	1,43
2	0,94
3	1,95
4	1,41
5	1,20
6	0,84
7	2,04
8	0,81
9	0,88
10	2,03
11	1,70
12	1,78
13	0,83

8.4.3 Modélisation de la réponse des traitements à l'environnement



8.4.4 Définition des domaines de réponse équivalente des traitements à l'environnement



	S.c.e.	dl	Carrés	moyens	Test f	Proba	E.t.	C.v.
Var. totale	8.03	19		0.42				
Var. facteur 1	7.35	3		2.45	46.05	0.0000		
Var. blocs	0.04	4		0.01	0.19	0.9363		
Var. résiduelle 1	0.64	12		0.05			0.23	26.9%

F1	Libellés	Moyennes	Groupes	homogènes
2	EP	1.64		A
3	SPT	1.25		B
1	EOT	0.35		C
4	TA	0.19		C

8.4.6.2 omaine n°2

Interaction traitements*blocs

test de Tukey =0.23

Proba =0. 1607

	S.c.e.	dl	Carrés	moyens	Test f	Proba	E.t.	C.v.
Var. totale	6.40	11		0.58				
Var. facteur 1	5.62	3		1.87	17.24	0.0029		
Var. blocs	0.13	2		0.06	0.59	0.5875		
Var. résiduelle 1	0.65	6		0.11			0.33	24.5%

F1	Libellés	Moyennes	Groupes	homogènes
2	EP	2.03		A
3	SPT	2.00		A
1	EOT	0.87		B
4	TA	0.48		B

8.4.6.3 omaine n°3

Interaction traitements*blocs

Scé test de Tukey =0.01

Proba =0.7750

	S.c.e.	dl	Carrés	moyens	Test f	Proba	E.t.	C.v.
Var. totale	3.11	19		0.16				
Var. facteur 1	1.86	3		0.62	5.43	0.0029		
Var. blocs	0.37	4		0.09	1.26	0.3388		
Var. résiduelle 1	0.88	12		0.07			0.27	14.3%

F1	Libellés	Moyennes	Groupes homogènes
3	SPT	2.41	A
2	EP	1.81	B
1	EOT	1.76	B
4	TA	1.61	B

8.4.6.4 Anova sur le regroupement des domaines

Source de variation	S.c.e	dl	Carrés moyens	Test f			
				Rap.cm	F calc	dl f	Proba
A : totale	5.88	11	0.53				
B : facteur 2	2.17	2	1.08				
C : facteur 1	2.97	3	0.99	C/d	7.97	3/6	0.0171
: inter f2*f1	0.75	6	0.12	D/e	6.06	6/30	0.0003
E : résiduelle pondérée		30	0.02				

Etr=0.35

8.4.6.5 Conclusions

Le test de Tukey montre une interaction traitements*blocs significative dans le domaine 1. Les conclusions de l'analyse de ce domaine ne sont donc pas applicables à tous les blocs, c'est à dire à tous les environnements. Aucune recommandation ne peut donc être formulée pour ce domaine.

Toutes les autres hypothèses sont par contre vérifiées dans les autres domaines :

Pas d'interaction traitements*blocs

Une interaction traitements*domaine significative

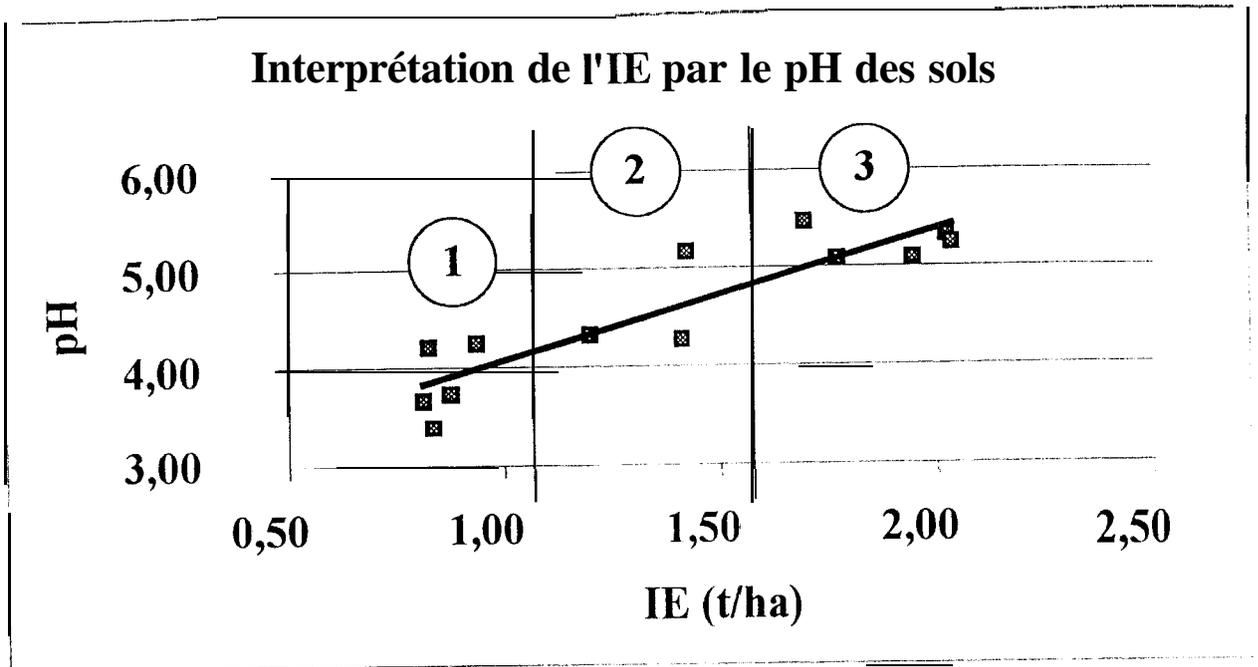
8.4.7 Recommandations indépendantes dans chaque domaine

Domaine 1 : pas de réponse

Domaine 2 : EP ou SPT

Domaine 3 : SPT

8.4.8 Explication de l'indice environnemental par des variables caractéristiques du milieu et Formulation des recommandations en termes de caractéristiques du milieu



Annexe 1 : Canevas de protocole expérimental

Centre de Recherche
Domaine de recherche
Chercheur responsable

Date de rédaction

Titre de l'expérience

1. Justificatifs de l'expérience
 - cadre général de l'étude
 - état des connaissances actuelles sur le sujet
 2. Objectifs expérimentaux
 - définition précise du but de l'expérience
 - formulation précise des questions posées
 - détermination de l'ordre de priorité des objectifs
 3. Facteurs étudiés
 - définition des facteurs à étudier
 - définition des niveaux ou modalités de ces facteur-s
 4. Conditions expérimentales
 - site expérimental
 - précédent cultural
 - source éventuelle d'hétérogénéité.
 5. Unités expérimentales
 - définition précise de l'unité expérimentale
 - détermination du nombre d'unités expérimentales
 6. Mesures et observations
 - définition précise des mesures et observations à réaliser
 7. Dispositif expérimental
 - choix du **dispositif** expérimental adéquat
 8. Nombre de répétitions
 - indication de la-précision souhaitée des résultats
 - détermination du nombre de répétitions en fonction de la précision souhaitée des résultats et de la variabilité du matériel expérimental à utiliser
-

9. Plan d'échantillonnage
 - détermination précise du plan d'échantillonnage lorsque, éventuellement, des mesures ou observations seront réalisées par échantillonnage
10. Méthode d'analyse statistique
 - définition de la ou des méthodes d'analyse statistique des données qui seront collectées
 - esquisse des tableaux de résultats attendus
11. Plan de l'essai
 - présentation du plan de l'essai tel qu'il sera mis en place
12. Planning de réalisation de l'expérience
 - calendrier de déroulement de l'expérience

Annexe 2 : Présentation des données avant analyse

1 PRINCIPES FONDAMENTAUX

Les logiciels de statistiques courants exigent que les données soient présentées sous une certaine forme. Elle correspond à une structure de base de données.

Il s'agit de présenter les données sous la forme d'une table lignes * colonnes dont les caractéristiques sont les suivantes :

• la ligne correspond aux données mesurées sur une unité expérimentale

Les colonnes correspondent :

- Aux données d'identification des parcelles
- Aux variables mesurées présentées sous leur forme brute ou élaborée

Classiquement, les colonnes sont classées dans l'ordre suivant :

1^{ère} colonne : numéro de parcelle, il sert à l'identification de l'unité expérimentale

2^{ème} à n^{ième} colonne : facteurs, le contenu de ces colonnes correspond aux niveaux des facteurs. Certains logiciels (comme Statitcf) exigent que les niveaux des facteurs soient codés numériquement, à partir de 1. D'autres (SAS, Genstat) supportent les libellés alphanumériques. La combinaison de ces colonnes constitue la clé unique d'identification d'une unité expérimentale, c'est à dire qu'elle permet de décrire de façon unique chaque unité expérimentale.

(n+1)^{ème} = dernière colonne : données.

2 CAS DE DONNEES ECHANTILLONNEES

si les données mesurées sur une unité expérimentale sont issues d'un échantillonnage, alors c'est la moyenne de cet échantillon qui doit figurer dans la table des données à analyser.

3 CAS DE MESURES REPETEES :

Si des données font l'objet d'un suivi dans le temps, c'est à dire qu'il s'agit de mesures répétées, alors elles doivent figurer dans la table comme des mesures ponctuelles, et leur désignation doit se terminer par le numéro de la mesure. Par exemple, la mesure de la hauteur de plantes à trois dates différentes doit se présenter sous la forme de trois variables H1, H2, et H3.

4 CAS DES REGROUPEMENTS D'ESSAIS :

Sous Statitcf : chaque essai doit être l'objet d'une table indépendante. Il ne faut pas considérer l'essai comme un facteur expérimental, même si cela peut se justifier. Lors de l'analyse de ces données, l'étape préalable est une analyse des données des essais individuels, d'où la nécessité de constituer un fichier par site.

Sous SAS ou Genstat : Toutes les données peuvent être présentées dans une seule table, en incluant un champ de type « Site », qui sera explicitement déclaré comme effet aléatoire dans l'analyse.

5 EXEMPLES

No	Var	Bloc	H_t1	H_t2	H_t3	NbFeuil	Rdt
1	1	1					
2	3	1					
3	7	1					
Etc...							

Présentation des données d'un essai variétal en blocs

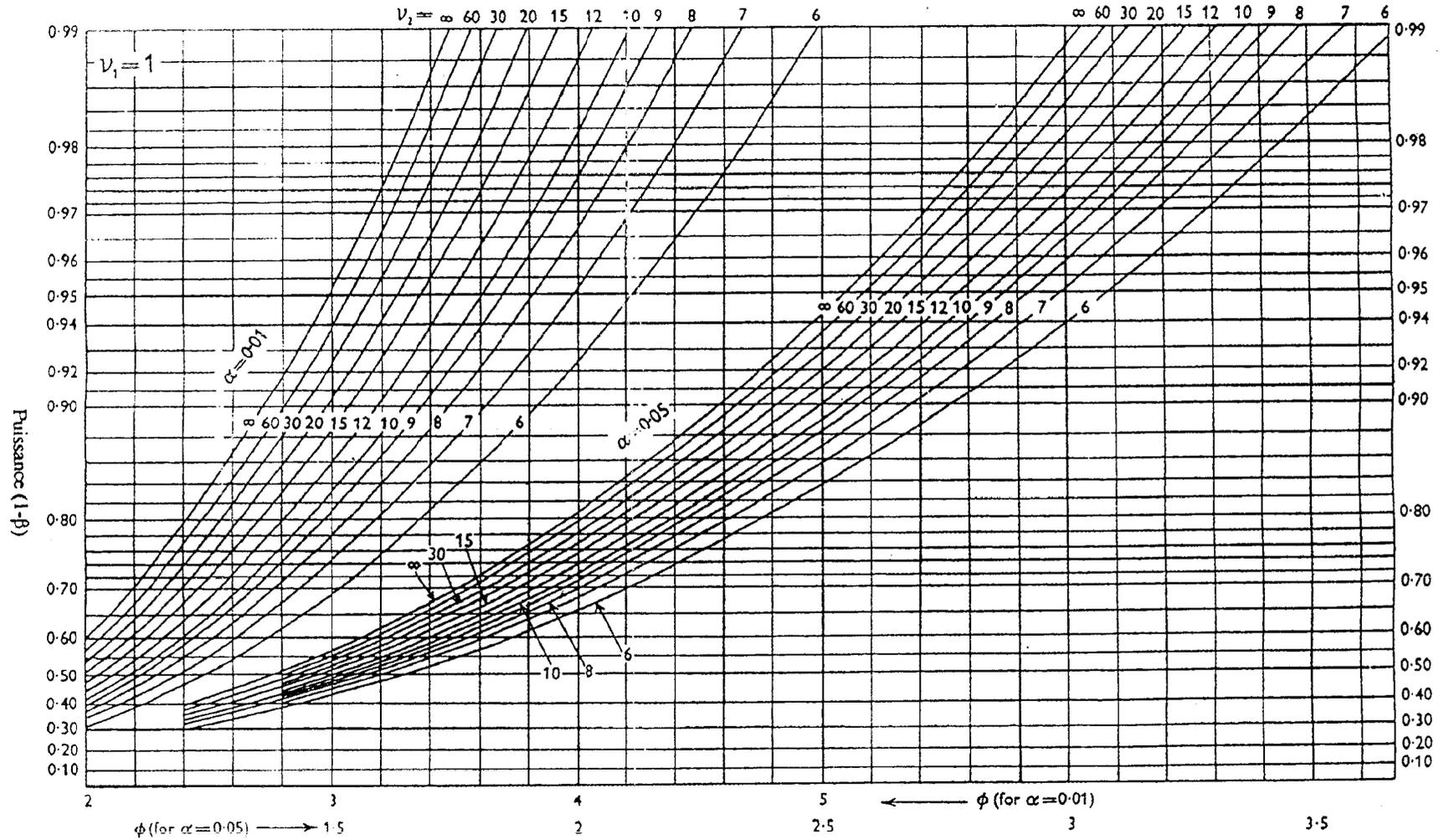
SITE	-BLOC	ENG	RDT
1	1	TA	0.70
1	1	EOT	0.90
1	1	SPT	2.30
1	1	EP	1.80
1	2	TA	0.50
1	2	EOT	0.65
1	2	SPT	1.10
1	2	EP	1.50
1	3	TA	1.45
1	3	EOT	1.95
1	3	SPT	2.50
1	3	EP	1.90
2	1	TA	0.60
2	1	EOT	1.20
2	1	SPT	1.60
2	1	EP	2.25

Présentation des données d'un essai multilocal en blocs (SAS - Genstat)

**Annexe 3 : Abaques de détermination de la
puissance d'une comparaison de plusieurs moyennes
(PEARSON ET HARTLEY, 1951)**

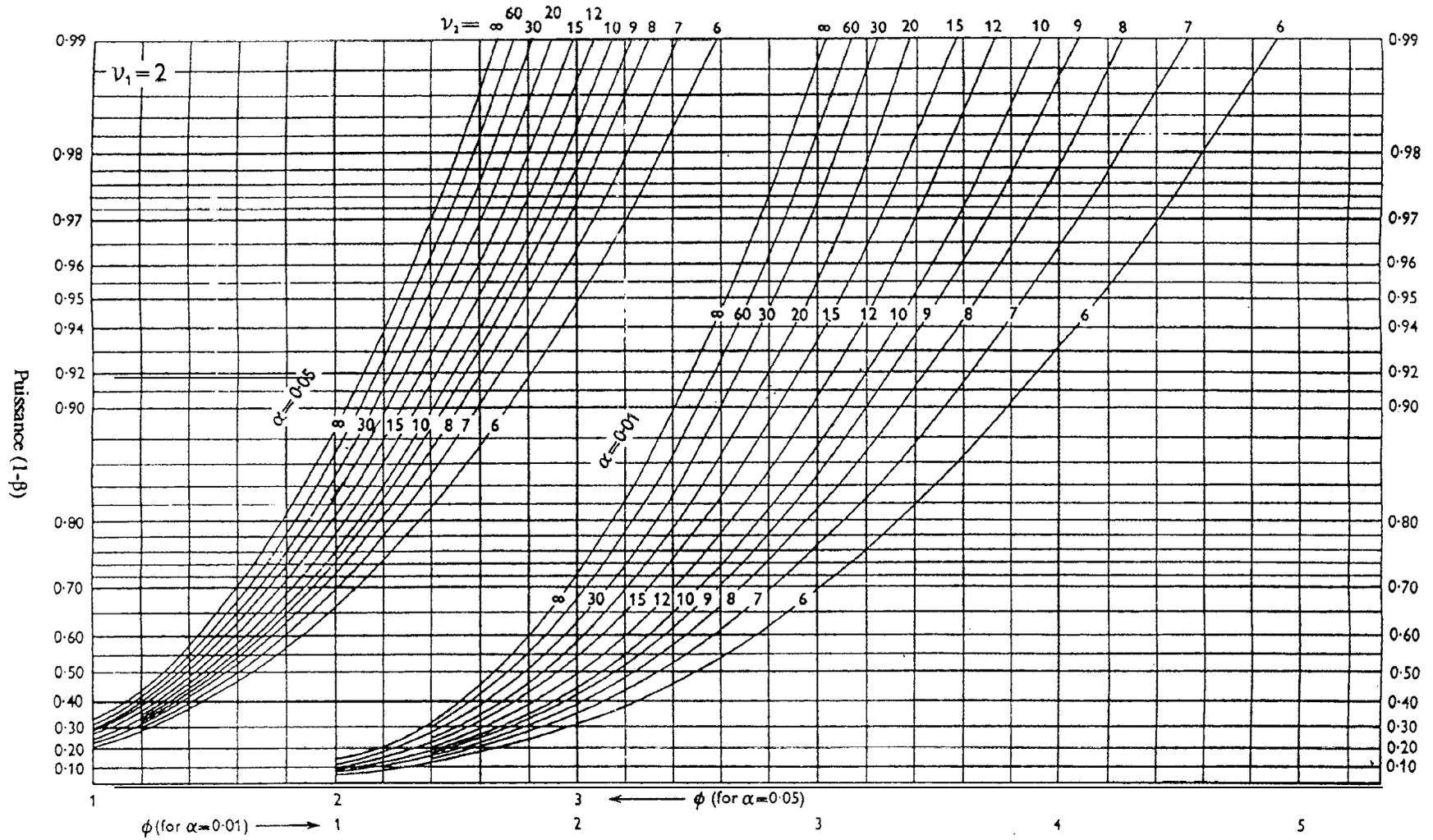
- $\nu_1=1$
- $\nu_1=2$
- $\nu_1=3$
- $\nu_1=4$
- $\nu_1=5$
- $\nu_1=6$
- $\nu_1=7$
- $\nu_1=8$
- $\nu_1=12$
- $\nu_1=24$

Table 30. Charts for determining the power of the t and F tests: fixed effects model



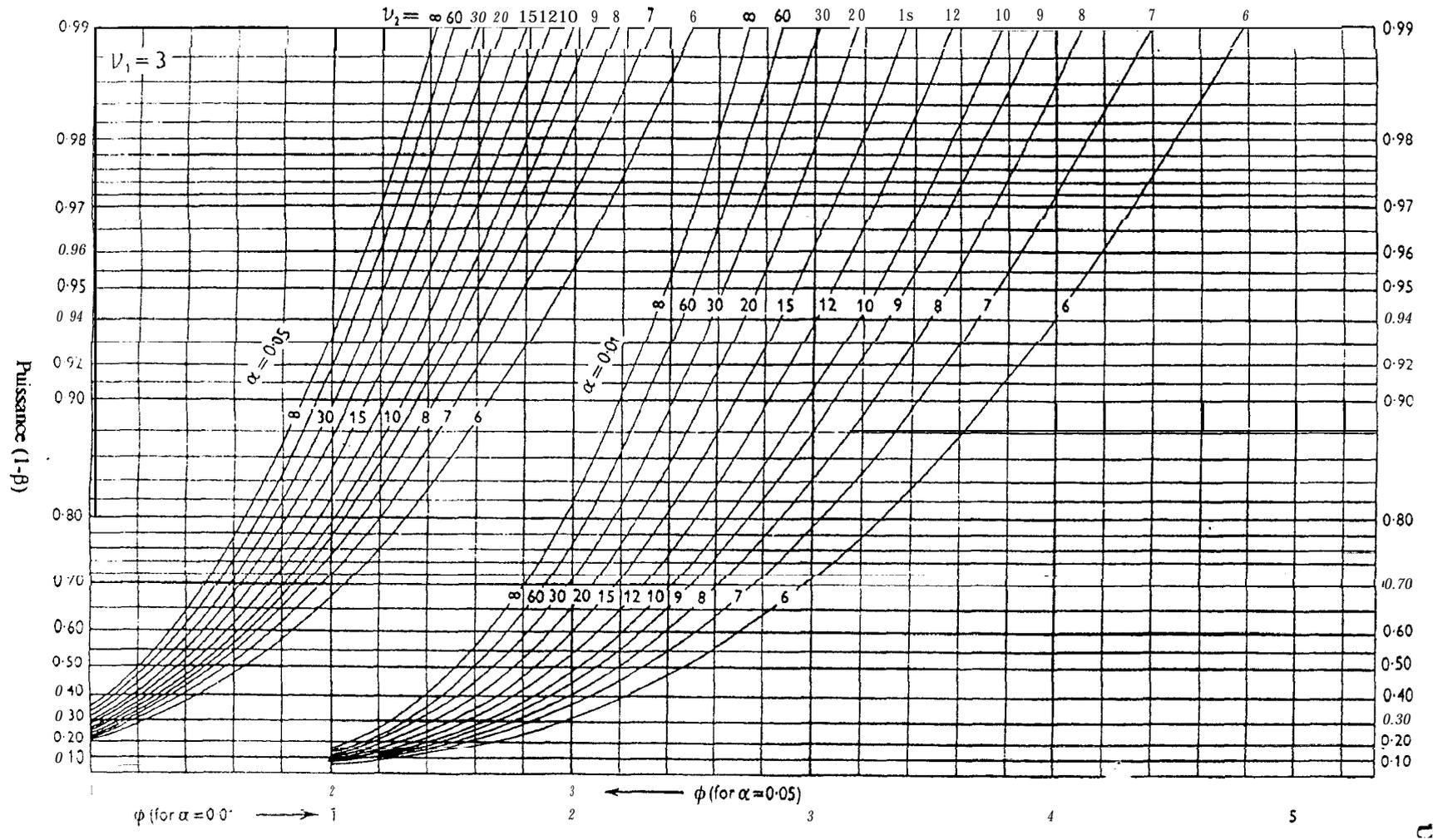
11
 11

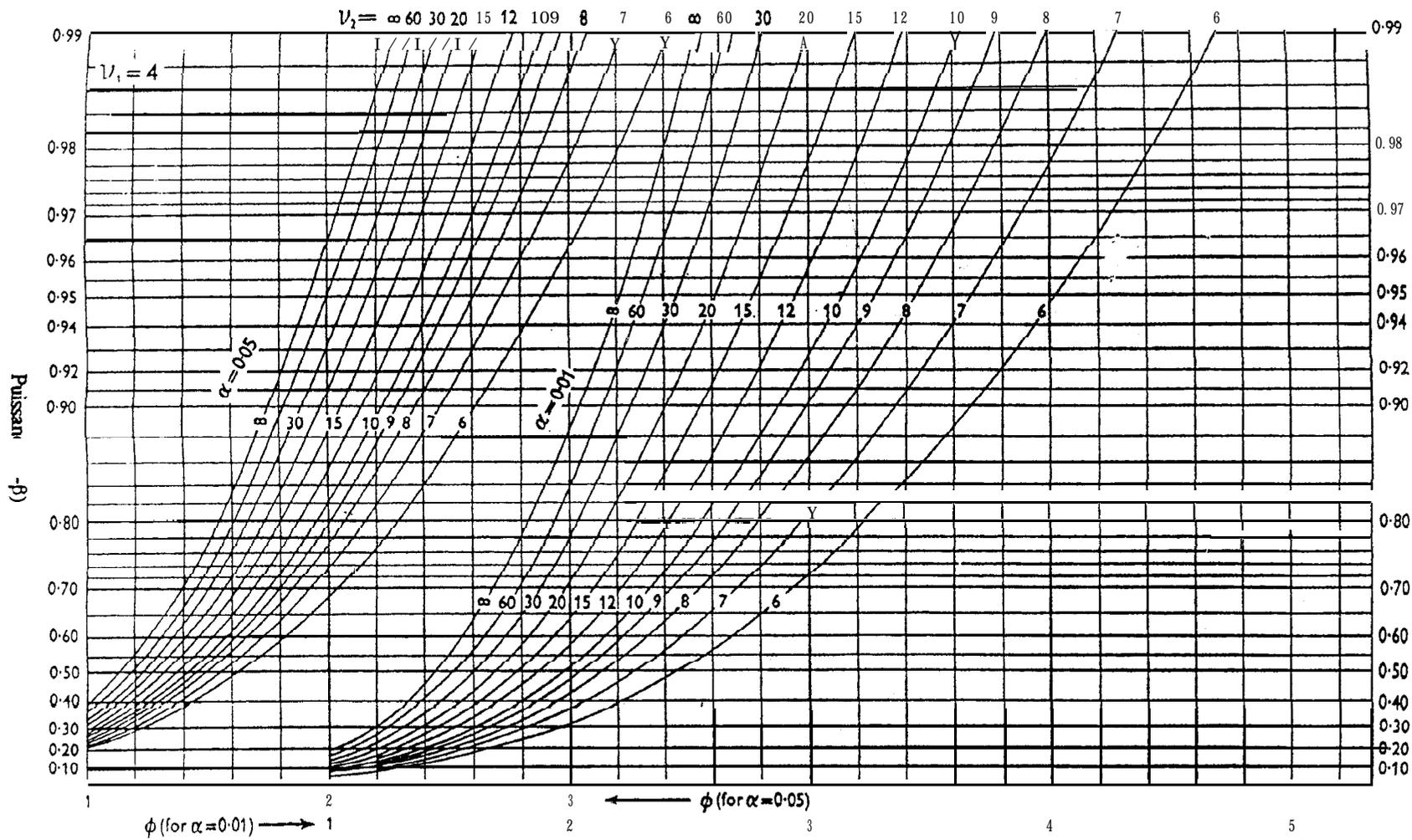
Table 30 (continued)



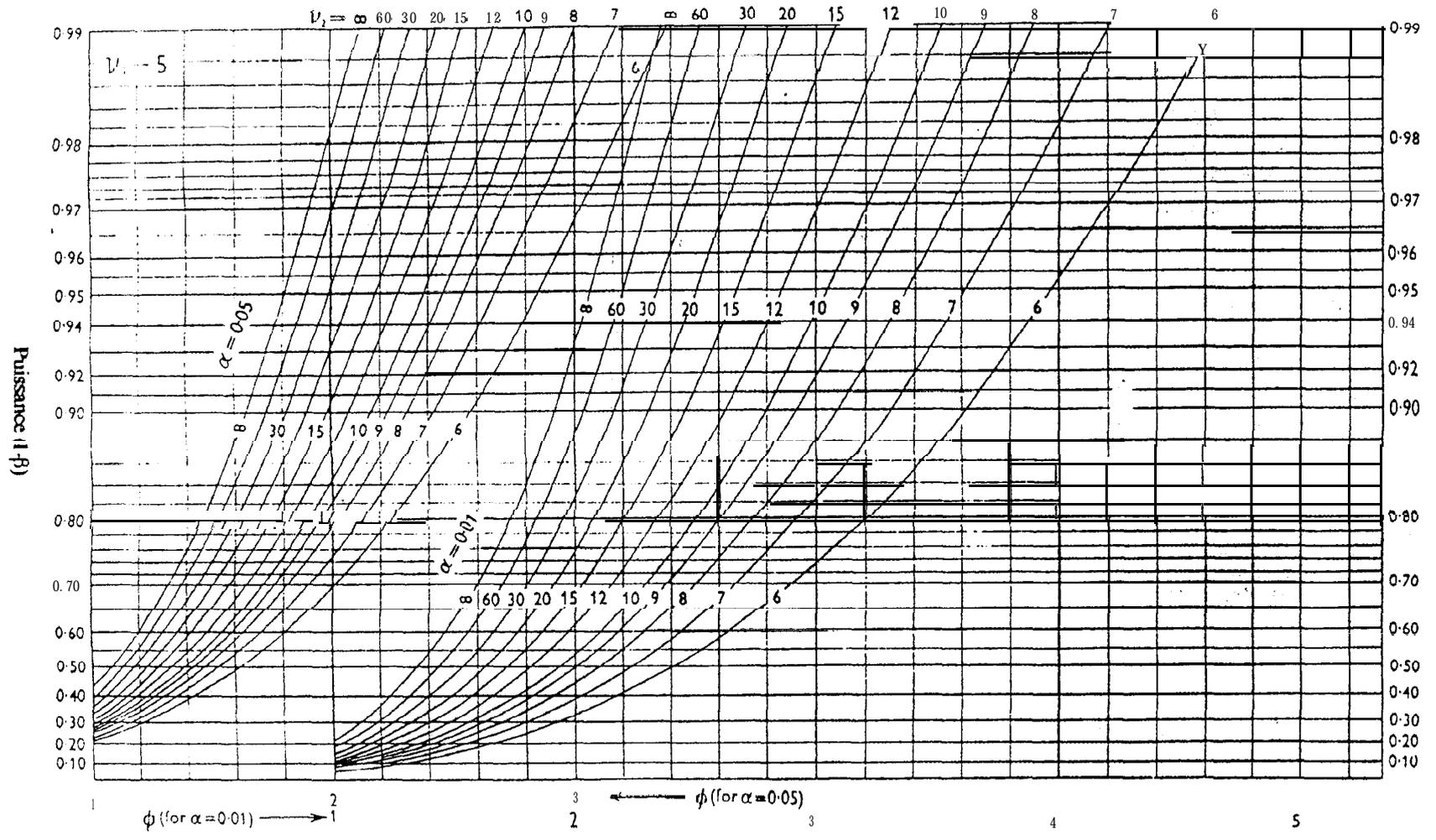
$\nu_1 = 2$

Table 30 (continued). Charts for determining the power of the t and F tests: fixed effects model

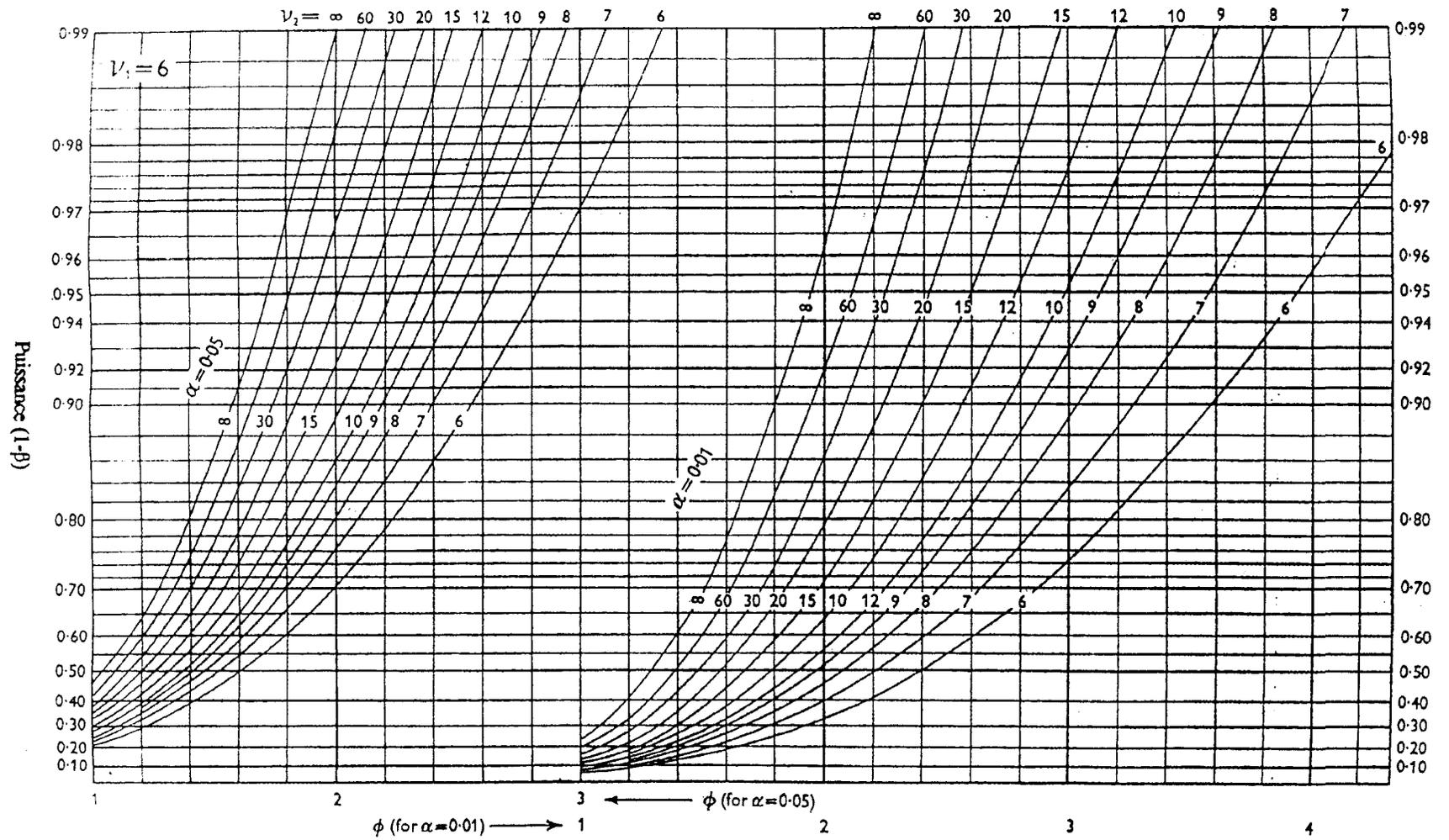




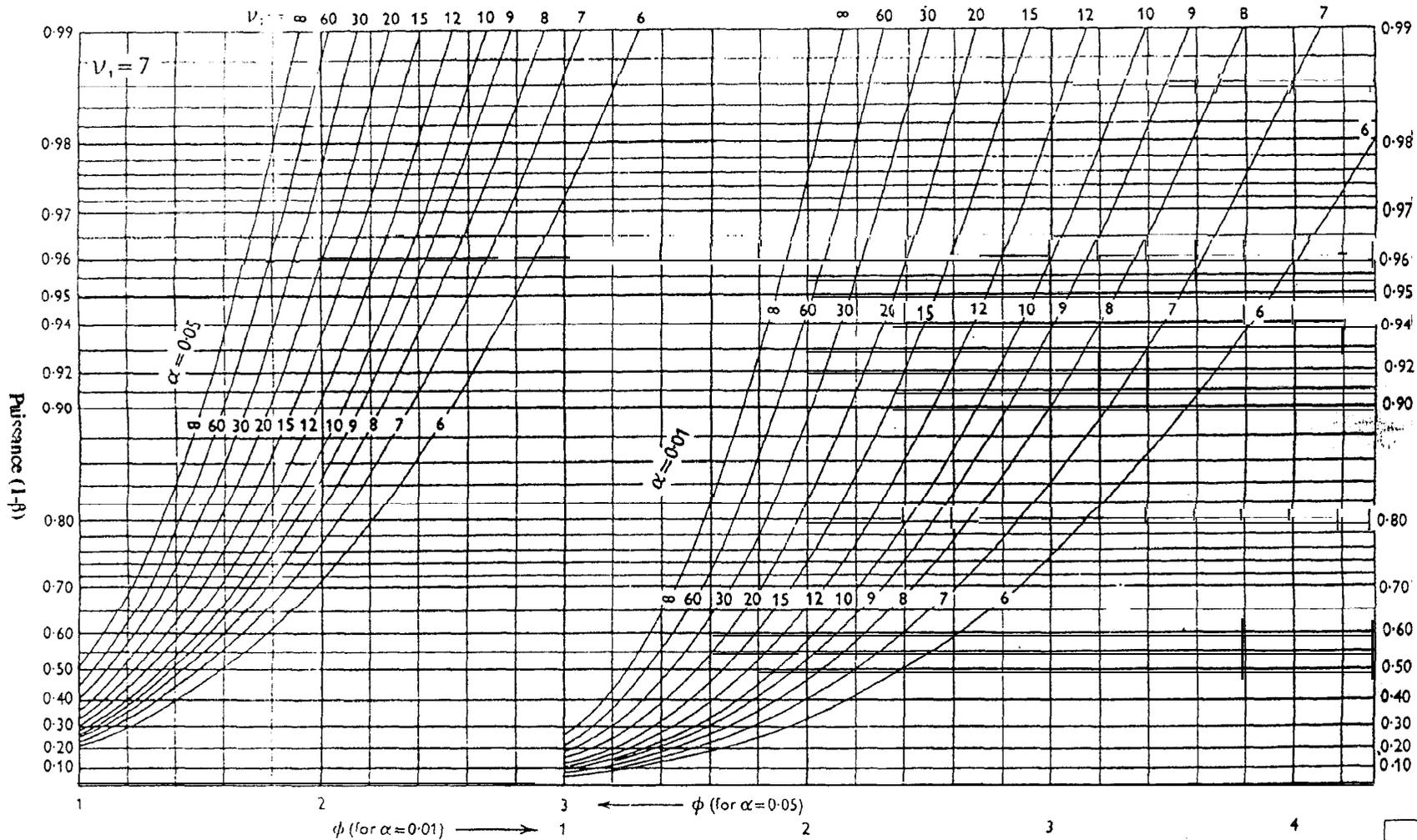
$V_1 = 4$



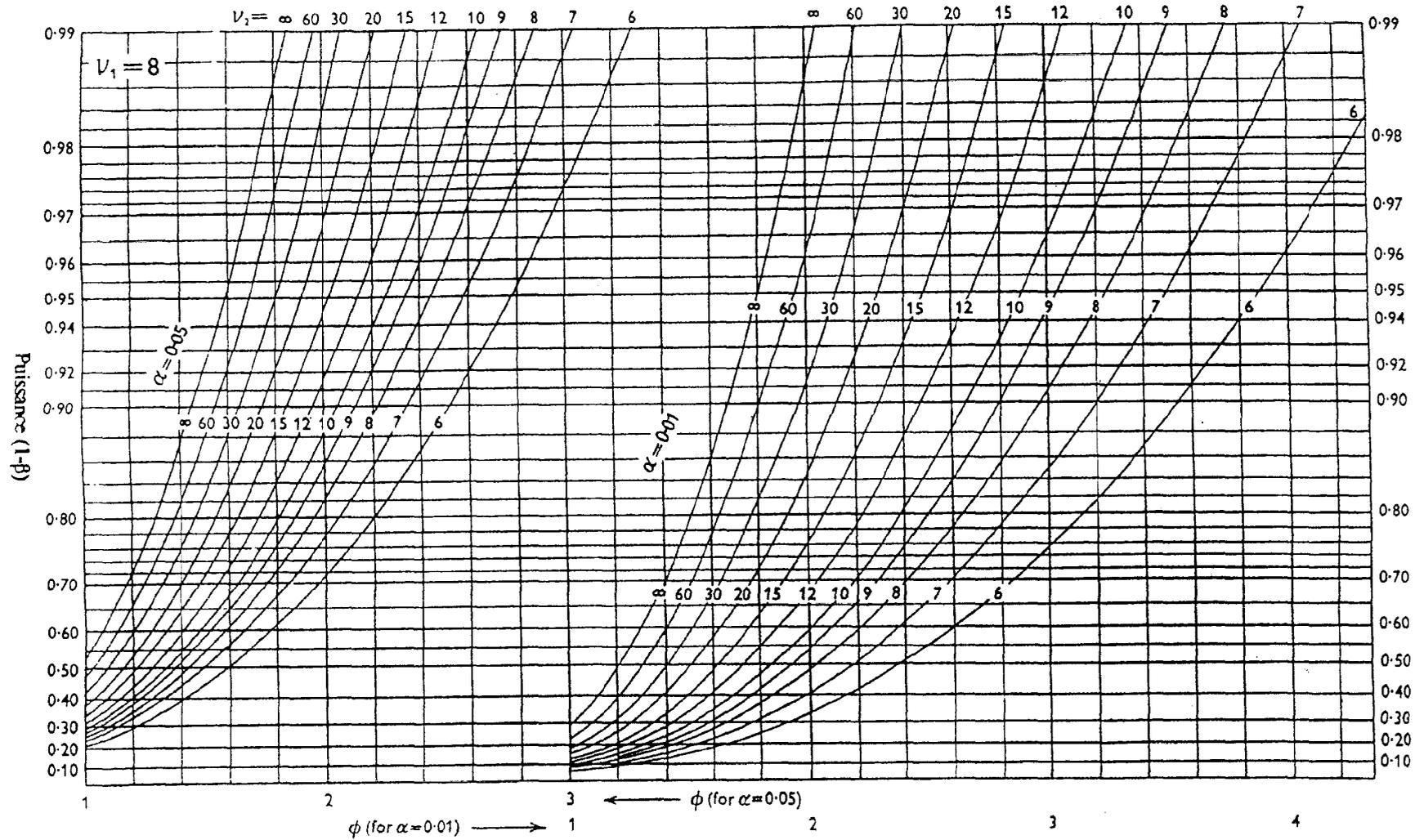
$n=5$



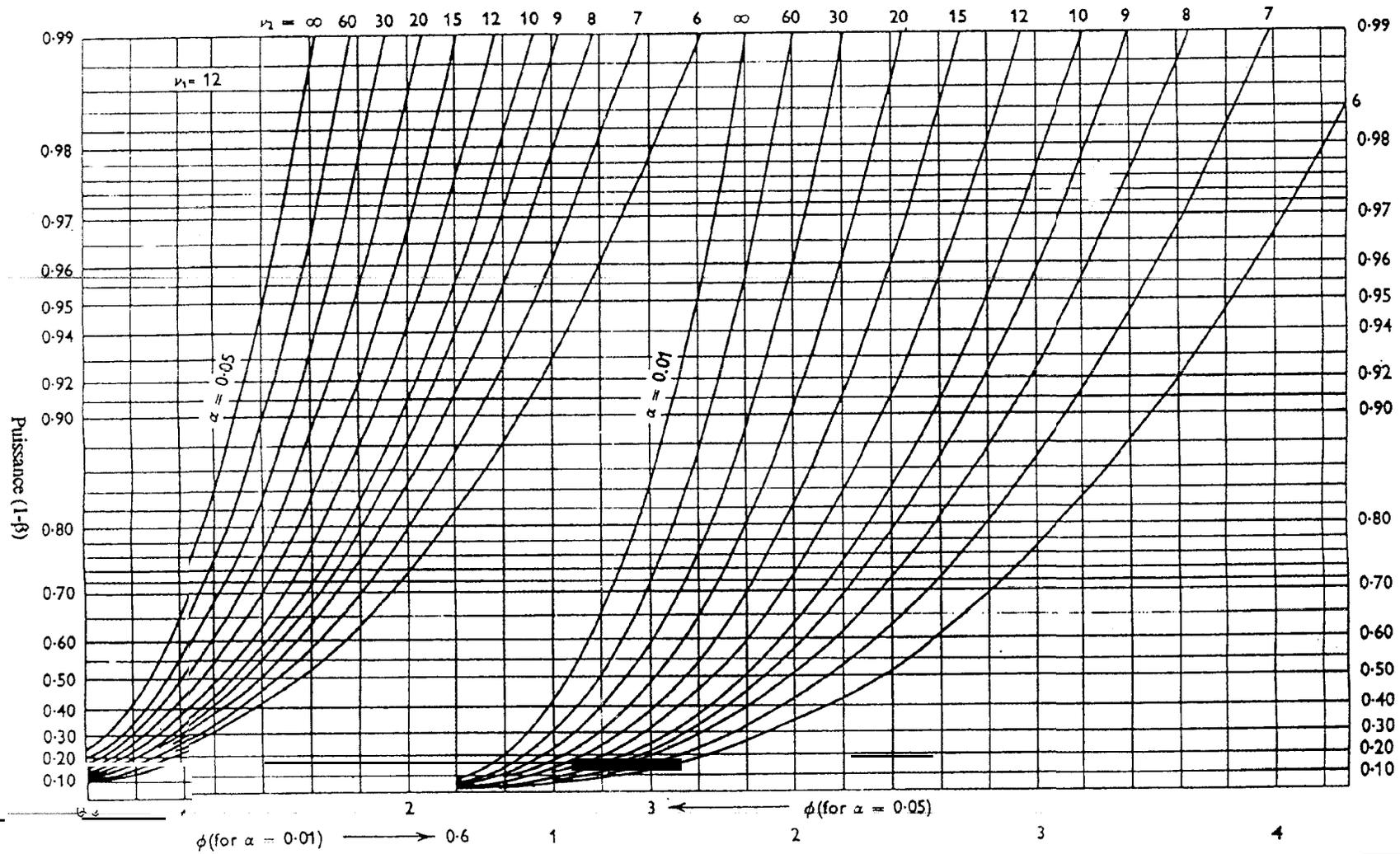
01=6



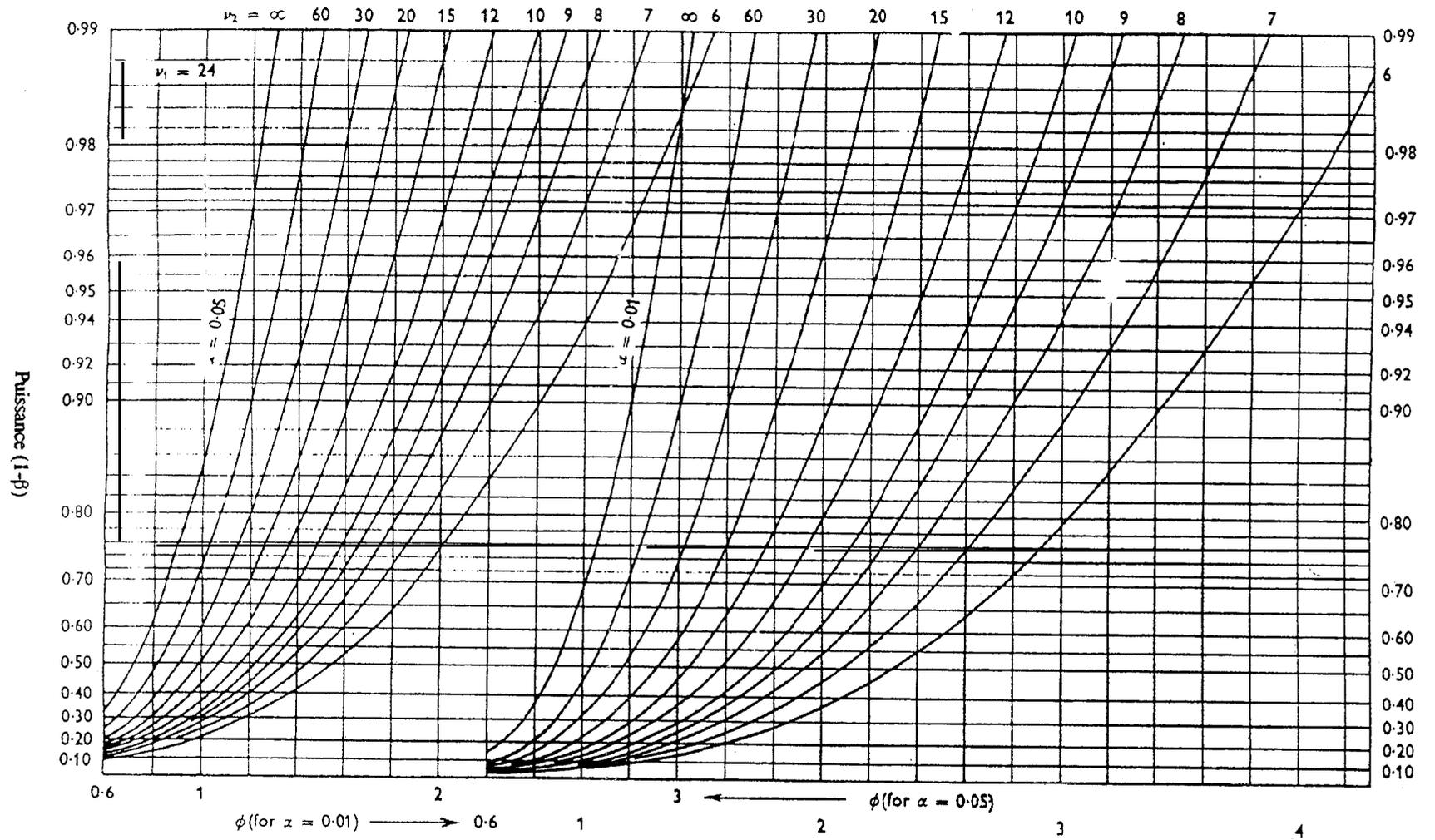
$v_1 = 7$



$V_1 = 8$



$\nu_1 = 12$



$\nu_1 = 24$